

Deux supermarchés concurrents, Alphamarché et Bétamarché ouvrent simultanément un service de retrait permettant à leurs clients de récupérer leurs courses après avoir passé leur commande sur internet.

Afin de promouvoir leur service de retrait, chacun organise une campagne de publicité.

Alphamarché contrôle l'efficacité de sa campagne par des sondages mensuels où les clients qui utilisent les services de retrait se prononcent tous en faveur d'un seul service de retrait, celui d'Alphamarché ou celui de Bétamarché.

Au début de la campagne, 20 % des personnes interrogées préfèrent Alphamarché. Les sondages mensuels ont permis de mettre en évidence que les arguments publicitaires font évoluer chaque mois la répartition.

On décide de modéliser cette évolution en considérant que 10 % des personnes préférant Alphamarché et 15 % des personnes préférant Bétamarché changent d'avis d'un mois sur l'autre.

Le mois du début de la campagne est noté mois 0.

On interroge, au hasard, un client faisant ses courses dans l'un des deux services de retrait.

Pour tout entier naturel n , on note :

- a_n la probabilité que le client interrogé préfère Alphamarché le mois n ;
 - b_n la probabilité qu'il préfère Bétamarché le mois n ;
 - $P_n = (a_n \ b_n)$ la matrice ligne désignant l'état probabiliste au mois n .
1. Déterminer la matrice ligne P_0 de l'état probabiliste initial.
 2. On note A , l'état « Le client interrogé préfère Alphamarché » et B l'état « Le client interrogé préfère Bétamarché ».
Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets A et B .
 3. a. Écrire la matrice de transition M de ce graphe en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
b. Montrer que $P_1 = (0,3 \ 0,7)$.
 4. a. Exprimer, pour tout entier naturel n , P_n en fonction de P_0 , M et n .
b. En déduire la matrice ligne P_3 et interpréter ce résultat.
 5. Le service de retrait d'Alphamarché finira-t-il par être préféré à celui de Bétamarché ?
Justifier.