

L'été un centre de loisirs propose aux adolescents la pratique du canoë-kayak ou de la planche à rame.

Tous les matins, chaque adolescent doit choisir un et un seul sport parmi les deux proposés.

On admet que :

- si un adolescent choisit le canoë-kayak un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse la planche à rame le jour suivant est égale à 0,4 ;
- si un adolescent choisit la planche à rame un jour donné, alors la probabilité qu'il choisisse le canoë-kayak le jour suivant est égale à 0,2 ;
- le premier jour, la proportion d'adolescents qui choisissent le canoë-kayak est égale à 0,85.

On note :

- K l'état : « l'adolescent choisit le canoë-kayak » ;
- $\bar{K}$ l'état : « l'adolescent choisit la planche à rame ».

On note, pour tout entier naturel $n \geq 1$:

- p_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse le canoë-kayak lors du n -ième jour ;
- q_n la probabilité qu'un adolescent pris au hasard choisisse la planche à rame le n -ième jour ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste lors du n -ième jour.

Les deux parties peuvent être traitées indépendamment.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets K et $\bar{K}$.
2. Donner la matrice de transition M associée à ce graphe, les sommets K et $\bar{K}$ étant classés dans cet ordre.
3. Justifier que $P_1 = (0,85 \quad 0,15)$.
4. Avec la calculatrice, déterminer l'état probabiliste lors du 3^e jour.
5. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, montrer que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$.

6. On considère l'algorithme suivant :

Initialisation

Choisir un nombre entier naturel $N \geq 2$
 p prend la valeur 0,85

Traitement

Pour i allant de 2 à N
 p prend la valeur $0,4p + 0,2$
Fin pour

Sortie

Afficher p

- a. Pour la valeur $N = 5$ saisie, recopier et compléter le tableau suivant par autant de colonnes que nécessaire pour retranscrire l'exécution de l'algorithme. Arrondir les résultats au millièème.

Valeur de i		2		
Valeur de p	0,85			

- b. En déduire l'affichage obtenu quand la valeur de N saisie est 5.
c. Dans le contexte de cet exercice, expliquer comment interpréter le nombre obtenu en sortie de cet algorithme.

Partie B

D'après la partie A, on sait que $p_{n+1} = 0,4p_n + 0,2$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

On admet que $p_n = \frac{31}{60} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.

1. Conjecturer la limite de la suite (p_n) .
2. Interpréter le résultat.