Dans une société d'assurance, les clients peuvent choisir de payer leur cotisation chaque mois (paiement mensuel) ou en une fois (paiement annuel).
On constate que 30 % de ceux qui paient en une fois choisissent le paiement mensuel l'année suivante, alors que 85 % de ceux qui paient chaque mois conservent ce mode de paiement l'année suivante.
En 2014, 60 % des clients paient en une fois et 40 % paient mensuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, n désigne un nombre entier naturel.
On note :

- a_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie en une fois pour l'année $2014+n$;

- b_n la probabilité qu'un client choisi au hasard paie mensuellement pour l'année $2014+n$.

On a $a_0 = 0,6$ et $b_0 = 0,4$ et on note P_n l'état probabiliste pour l'année $2014+n$. Ainsi $P_0 = \begin{pmatrix}0,6 & 0,4\end{pmatrix}$.
On note :

- A l'état « le client paie en une fois » ;
- B l'état « le client paie mensuellement ».

1. Représenter un graphe probabiliste de sommets A et B.
2. Écrire la matrice de transition M associée à ce graphe en prenant les sommets dans l'ordre alphabétique.
3. Déterminer la probabilité qu'un client paie en une fois durant l'année 2018 (arrondir les résultats au millième).
4. Déterminer l'état stable et en donner une interprétation.
5. Pour tout entier naturel n, justifier que $a_{n+1} = 0,55a_n + O,15$.
6. On cherche à déterminer le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.
   a. Écrire un algorithme permettant de déterminer cet entier n.
   b. On admet que pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \frac{4}{15} \times 0,55^n + \frac{1}{3}.$$
   Déterminer par le calcul le plus petit entier n tel que $a_n < 0,3334$.