

Une municipalité vient de mettre en place le service « vélo en liberté ». Il s'agit d'un service de location de vélos à la journée.

Les vélos sont disponibles sur deux sites A et B et doivent être ramenés en fin de journée indifféremment dans l'un des deux sites.

Après une étude statistique, on considère que :

- si un vélo est loué sur le site A , la probabilité d'être ramené en A est 0,6 ;
- si un vélo est loué sur le site B , la probabilité d'être ramené en B est 0,7.

Les résultats numériques seront arrondis à 10^{-2} près.

1. En notant respectivement A et B les états « le vélo est en A » et « le vélo est en B », traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets A et B .
2. Donner M la matrice de transition de ce graphe en considérant les sommets dans l'ordre A, B .
3. Pour tout entier naturel n , on note a_n (respectivement b_n) la probabilité qu'un vélo quelconque soit, après n jours, sur le site A (respectivement sur le site B).

On note P_n la matrice $(a_n \ b_n)$ correspondant à l'état probabiliste après n jours.

Le premier jour, tous les vélos sont distribués également sur les deux sites. On a donc $P_0 = (0,5 \ 0,5)$.

- a. On donne :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,48 & 0,52 \\ 0,39 & 0,61 \end{pmatrix}.$$

Calculer P_2 en donnant le détail des calculs matriciels.

- b. Calculer P_4 et interpréter le résultat dans le contexte du problème.
- c. Déterminer l'état stable du graphe, noté $(a \ b)$.
- d. Tous les mois, un véhicule est affecté à la redistribution des vélos afin de rétablir au mieux la répartition initiale qui était de 70 vélos sur chaque site.
- La municipalité envisage d'affecter un véhicule pouvant contenir 12 vélos.
- Ce choix paraît-il adapté à la situation ?