Partie A

Un constructeur de planches de surf fabrique 3 modèles. La conception de chaque modèle nécessite le passage par 3 postes de travail. Le **tableau 1** indique le nombre d'heures nécessaires par modèle et par poste pour réaliser les planches et le **tableau 2** indique le coût horaire par poste de travail.

Tableau 1	Poste 1	Poste 2	Poste 3		Tableau 2	
Modèle 1	8 h	10 h	14 h		Poste 1	25 €/h
Modèle 2	6 h	6 h	10 h		Poste 2	20 €/h
Modèle 3	12 h	10 h	18 h		Poste 3	15 €/h

1. Soit H et C les deux : matrices suivantes : $H = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 14 \\ 6 & 6 & 10 \\ 12 & 10 & 18 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 25 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

a. Donner la matrice produit $P = H \times C$.

b. Que représentent les coefficients de la matrice $P = H \times C$?

2. Après une étude de marché, le fabricant souhaite que les prix de revient par modèle soient les suivants :

Modèle 1 : 500 € ; Modèle 2 : 350 € ; Modèle 3 : 650 €

Il cherche à déterminer les nouveaux coûts horaires par poste, notés a, b et c, permettant d'obtenir ces prix de revient.

a. Montrer que les réels a, b et c doivent être solutions du système

$$H \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 500 \\ 350 \\ 650 \end{pmatrix}.$$

b. Déterminer les réels a, b et c.

Partie B

La façade du magasin dans lequel sont commercialisées les planches est illuminée par un très grand nombre de spots qui sont programmés de la manière suivante :

- les spots s'allument tous à 22 heures ;
- toutes les 10 secondes à partir de 22 heures, et ce de manière aléatoire, 30 % des spots allumés s'éteignent et 50 % de ceux qui sont éteints se rallument.

On note : A l'état : « le spot est allumé » et E l'état : « le spot est éteint ».

1. **a.** Dessiner un graphe probabiliste traduisant la situation.

   b. Recopier et compléter la matrice de transition (dans l'ordre A, E) associée au graphe, $M = \begin{pmatrix} \cdots & 0,3 \\ 0,5 & \cdots \end{pmatrix}$.

2. On note n le nombre d'étapes (c'est à dire d'intervalles de temps de 10 secondes) qui s'écoulent à partir de 22 heures et $P_n = (a_n \quad b_n)$ l'état d'un spot à l'étape n, où a_n est la probabilité qu'il soit allumé et b_n la probabilité qu'il soit éteint.

   On a alors, pour tout entier naturel n : $P_{n+1} = P_n \times M$.

   a. Justifier que $a_0 = 1$ et $b_0 = 0$. Écrire une relation entre P_0 et P_n.

   b. Déterminer les coefficients de la matrice P_3. Quelle est la probabilité que le spot considéré soit éteint à 22 heures et 30 secondes ?

3. Déterminer l'état stable $(a \quad b)$ du graphe probabiliste.