

Les sites internet A, B, C ont des liens entre eux. Un internaute connecté sur un de ces trois sites peut, à toutes les minutes, soit y rester soit utiliser un lien vers un des deux autres sites.

- Pour un internaute connecté sur le site A, la probabilité d'utiliser le lien vers B est de 0,2 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,2.
- Pour un internaute connecté sur le site B, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,1 et celle d'utiliser le lien vers C est de 0,4.
- Pour un internaute connecté sur le site C, la probabilité d'utiliser le lien vers A est de 0,2 mais il n'y a pas de lien direct avec B.

L'unité de temps est la minute, et à un instant $t = 0$, le nombre de visiteurs est, respectivement sur les sites A, B et C : 100, 0 et 0.

On représente la distribution des internautes sur les trois sites après t minutes par une matrice N_t ; ainsi $N_0 = \begin{pmatrix} 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On suppose qu'il n'y a ni déconnexion pendant l'heure (de $t = 0$ à $t = 60$) ni nouveaux internautes visiteurs.

1. Représenter le graphe probabiliste de sommets A, B et C correspondant à la situation décrite.
2. Écrire la matrice M de transition associée à ce graphe (dans l'ordre A, B, C).
3. On donne

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,42 & 0,22 & 0,36 \\ 0,19 & 0,27 & 0,54 \\ 0,28 & 0,04 & 0,68 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{20} \approx \begin{pmatrix} 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \\ 0,3125 & 0,125 & 0,5625 \end{pmatrix}.$$

Calculer N_2 . Interpréter le résultat obtenu.

4. Calculer $N_0 \times M^{20}$. Conjecturer la valeur de l'état stable et interpréter la réponse.
5. Un des internautes transmet un virus à tout site qu'il visitera.
Il se connecte initialement sur le site C et commence sa navigation.
À l'instant $t = 0$, le site C est donc infecté.
 - a. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 1$ le site A soit infecté ?
 - b. Quelle est la probabilité qu'à l'instant $t = 2$ les trois sites soient infectés ?