

Pour satisfaire ses adhérents, un club de sport a instauré trois niveaux d'apprentissage :

DÉBUTANT (D), CONFIRMÉ (C) et EXPERT (E).

Au 1^{er} septembre 2012, lors de l'inscription, le club comptait :

- 30 % de débutants ;
- 50 % de confirmés ;
- 20 % d'experts.

D'une année sur l'autre, on constate que :

- parmi les adhérents de niveau débutant, 40 % restent à ce niveau et 60 % passent au niveau confirmé ;
- parmi les adhérents de niveau confirmé, 60 % restent à ce niveau et 40 % passent au niveau expert ;
- parmi les adhérents de niveau expert, 80 % restent à ce niveau, 10 % redescendent au niveau confirmé et les autres 10 % préfèrent reprendre les bases au niveau débutant.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux venus ni de départs dans le club.

Soit $P_n = (d_n \ e_n \ e_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois niveaux d'apprentissage D, C et E au 1^{er} septembre de l'année 2012 + n pour tout entier naturel n .

1. **a.** Donner sans justification la matrice P_0 .
- b.** Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets D, C et E.
On donne la matrice carrée M de transition en respectant l'ordre D, C, E des sommets.

$$M = \begin{pmatrix} 0,4 & \textit{0,6} & 0 \\ 0 & 0,6 & 0,4 \\ 0,1 & 0,1 & \textit{0,8} \end{pmatrix}$$

Dans la suite de l'exercice, on pourra utiliser les résultats suivants (résultats arrondis au millième) :

$$M^5 = \begin{pmatrix} 0,085 & 0,331 & 0,584 \\ 0,097 & 0,293 & 0,610 \\ 0,104 & 0,298 & 0,598 \end{pmatrix} \quad M^{10} = \begin{pmatrix} 0,100 & 0,299 & 0,601 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \\ 0,100 & 0,300 & 0,600 \end{pmatrix}$$

2. Dans cette matrice on lit ***0,6*** et ***0,8*** en italique gras.
 - a.** Préciser, à l'aide d'une phrase, à quoi correspondent ces deux valeurs en lien avec la situation étudiée.
 - b.** Calculer P_1 .
 - c.** Déterminer la répartition prévisible, en pourcentages, des adhérents dans ce club de sport au 1^{er} septembre 2017. Les résultats seront donnés à 0,1 % près.
3. **a.** En calculant P_{10} , émettre une conjecture sur la matrice P correspondant à l'état probabiliste stable.
 - b.** Vérifier cette conjecture.
- c.** Quelle conclusion peut-on en tirer pour la répartition des adhérents ?

