

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.

Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur A » ;
- H désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, =

$$\text{est } M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}.$$

1. Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M .
2. Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M .

Pour tout entier naturel n , on note :

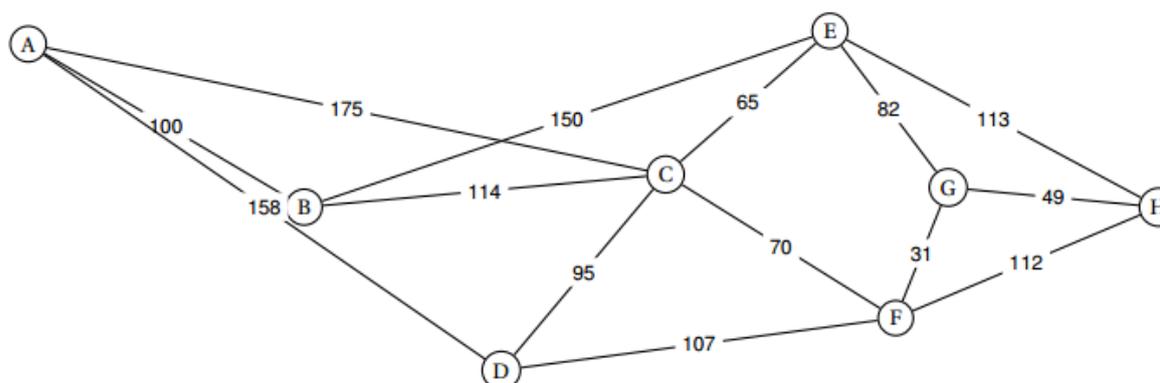
- a_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A » ;
- h_n la probabilité de l'évènement : « La semaine n , l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H » ;
- P_n la matrice $\begin{pmatrix} a_n & h_n \end{pmatrix}$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n .

3. Vérifier que la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ correspond à l'état stable du système. En donner une interprétation.
4. On donne $P_0 = (0,4 \quad 0,6)$ et on rappelle que $P_k = P_0 \times M^k$, pour k entier naturel. Déterminer la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètres possible.

Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites, A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.