

Les parties A et B sont indépendantes

Deux sociétés, Ultra-eau (U) et Vital-eau (V), se partagent le marché des fontaines d'eau à bonbonnes dans les entreprises d'une grande ville.

Partie A

En 2013, l'entreprise U avait 45 % du marché et l'entreprise V le reste. Chaque année, l'entreprise U conserve 90 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise V. Quant à l'entreprise V, elle conserve 85 % de ses clients, les autres choisissent l'entreprise U.

On choisit un client au hasard tous les ans et on note pour tout entier naturel n :

u_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise U l'année 2013 + n , ainsi

$$u_0 = 0,45;$$

v_n la probabilité qu'il soit un client de l'entreprise V l'année 2013 + n .

1. Représenter la situation par un graphe probabiliste de sommets U et V.
2. Donner v_0 , calculer u_1 et v_1 .
3. On considère l'algorithme (incomplet) donné en annexe. Celui-ci doit donner en sortie les valeurs de u_n et v_n pour un entier naturel n saisi en entrée.
Compléter les lignes (L5) et (L8) de l'algorithme pour obtenir le résultat attendu.
4. On admet que, pour tout nombre entier naturel n , $u_{n+1} = 0,75u_n + 0,15$. On note, pour tout nombre entier naturel n , $w_n = u_n - 0,6$.
 - a. Montrer que la suite (w_n) est une suite géométrique de raison 0,75.
 - b. Quelle est la limite de la suite (w_n) ? En déduire la limite de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de cet exercice.

Partie B

L'entreprise U fournit ses clients en recharges pour les fontaines à eau et dispose des résultats antérieurs suivants :

Nombre de recharges en milliers	1	3	5
Coût total annuel de production en centaines d'euros	11	27,4	83

Le coût total de production est modélisé par une fonction C définie pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0; 10]$ par :

$$C(x) = ax^3 + bx^2 + cx + 10 \quad a, b \text{ et } c \text{ sont des nombres réels.}$$

Lorsque le nombre x désigne le nombre de milliers de recharges produites, $C(x)$ est le coût total de production en centaines d'euros.

On admet que le triplet (a, b, c) est solution du système (S).

$$(S) \quad \begin{cases} a + b + c & = & 1 \\ 27a + 9b + 3c & = & 17,4 \\ 125a + 25b + 5c & = & 73 \end{cases} \quad \text{et on pose } X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

1. a. Écrire ce système sous la forme $MX = Y$ où M et Y sont des matrices que l'on précisera.

- b. On admet que la matrice M est inversible. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le triplet (a, b, c) solution du système (S).
2. En utilisant cette modélisation, quel serait le coût total annuel de production pour 8 000 recharges d'eau produites?

Annexe à l'exercice 2

Recopier sur la copie la partie « traitement » (lignes L3 à L9) en complétant les lignes L5 et L8.

Variables :	N est un nombre entier naturel non nul	L1
	U et V sont des nombres réels	L2
Traitement :	Saisir une valeur pour N	L3
	Affecter à U la valeur 0,45	L4
	Affecter à V la valeur	L5
	Pour i allant de 1 jusqu'à N	L6
	Affecter à U la valeur $0,9 \times U + 0,15 \times V$	L7
	Affecter à V la valeur	L8
	Fin Pour	L9
Sortie :	Afficher U et Afficher V	L10