

Dans la commune de Girouette, deux partis s'affrontent aux élections tous les ans. En 2010, le parti Hirondelle l'a emporté avec 70 % des voix contre 30 % au parti Phénix.

On admet qu'à partir de l'année 2010 :

14 % des électeurs votant pour le parti Hirondelle à une élection voteront pour le parti Phénix à l'élection suivante.

6 % des électeurs votant pour le parti Phénix à une élection voteront pour le parti Hirondelle à l'élection suivante.

Les autres ne changent pas d'avis.

On considère un électeur de Girouette choisi au hasard.

On note H l'état « L'électeur vote pour le parti Hirondelle » et P l'état « L'électeur vote pour le parti Phénix ».

1.
 - a. Représenter le graphe probabiliste associé à cette situation.
 - b. Déterminer la matrice de transition M en considérant les états dans l'ordre alphabétique.
2. On appelle $E_n = \begin{pmatrix} h_n & p_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste de l'année $2010 + n$.
On a donc $E_0 = (0,7 \quad 0,3)$.
Déterminer E_1 et E_4 . (On arrondira les coefficients de E_4 au centième). Interpréter les résultats.
3.
 - a. Montrer que pour tout entier naturel n , on a : $h_{n+1} = 0,8h_n + 0,06$.
 - b. On définit la suite (u_n) par : pour tout entier naturel n , $u_n = h_n - 0,3$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
 - c. Montrer que pour tout entier naturel n , $h_n = 0,3 + 0,4 \times 0,8^n$.
4. À partir de combien d'années la probabilité qu'un électeur choisi au hasard vote pour le parti Hirondelle sera-t-elle strictement inférieure à 0,32 ?