Une étude est réalisée chaque hiver sur une population composée de personnes qui peuvent pratiquer le ski de piste ou le snowboard.
L'étude révèle que :

- Si une personne pratique le ski de piste, alors la probabilité qu'elle pratique le snowboard l'hiver suivant est égale à 0,2.
- Si une personne pratique le snowboard, alors la probabilité qu'elle pratique le ski de piste l'hiver suivant est égale à 0,3.

On note S l'état : « la personne pratique le ski de piste » et $\overline{S}$ l'état : « la personne pratique le snowboard ».
On note également pour tout entier naturel n :

- p_n la probabilité qu'une personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ;
- q_n la probabilité qu'une personne pratique le snowboard lors du n-ième hiver ;
- $P_n = \begin{pmatrix} p_n & q_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne donnant l'état probabiliste du système lors du n-ième hiver.

On suppose que la population initiale ne comporte que des personnes pratiquant le ski de piste, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie A

1. Représenter la situation à l'aide d'un graphe probabiliste de sommets S et $\overline{S}$.
2. **a.** Donner la matrice de transition M de ce graphe probabiliste.

   b. Calculer M^2.

   c. Déterminer l'état probabiliste P_2.
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
4. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	
①	J et N sont des entiers naturels
②	p est un nombre réel
Entrée :	
③	Saisir N
Initialisation :	
④	p prend la valeur 1
Traitement :	
⑤	Pour J allant de 1 à N
⑥	p prend la valeur ....
⑦	Fin Pour
Sortie :	
⑧	Afficher p

Recopier et compléter la ligne ⑥ de cet algorithme afin d'obtenir la probabilité p_N.

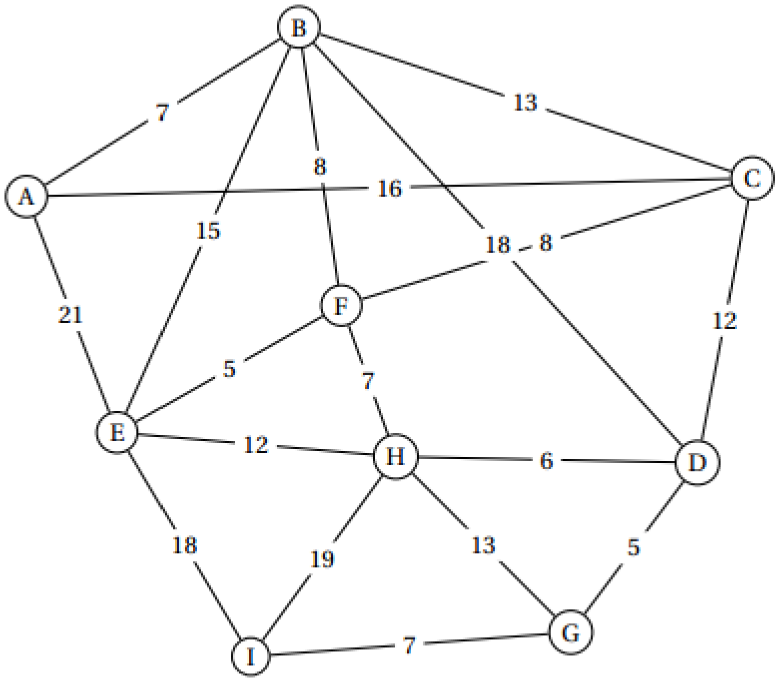
Partie B

On considère, pour tout entier naturel n, l'évènement S_n : « la personne pratique le ski de piste lors du n-ième hiver ». La probabilité de l'évènement S_n est notée $p(S_n)$.
On a donc $p_n = p(S_n)$.
On sait d'après la **partie A** que pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,3$.
Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = p_n - 0,6$.

1. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et préciser la valeur de u_0.
2. En déduire l'expression de u_n en fonction de n puis l'expression de p_n en fonction de n.
3. Déterminer la limite de la suite (p_n) et interpréter le résultat.

Partie C

Une partie du domaine skiable est représentée par le graphe ci-dessous.
Le sommet A représente le haut des pistes de ski et le sommet I en représente le bas.
Les sommets B, C, D, E, F, G et H représentent des points de passages.
Chacune des arêtes est pondérée par la distance, en centaine de mètres, entre deux sommets.



Déterminer, à l'aide de l'algorithme de Dijkstra, la distance minimale permettant de relier le sommet A au sommet I.