

Dans une entreprise, la société de débit boisson CAFTHÉ installe deux machines : l'une ne sert que du café et l'autre ne sert que du thé.

Chaque jour lors de la pause déjeuner, chaque employé de l'entreprise choisit une boisson, et une seule : café ou thé. On suppose que le nombre total d'employés de l'entreprise reste constant au cours du temps.

La société CAFTHÉ pense que la machine à café sera toujours la plus utilisée. Une enquête, effectuée sur plusieurs jours, auprès des employés pour connaître leurs choix de boisson a montré que :

- 97 % des employés qui choisissent un café un jour donné prennent encore un café le lendemain.
- 98 % des employés qui choisissent un thé un jour donné prennent encore un thé le lendemain.

On admet que cette tendance se poursuit les jours suivants.

Le premier jour, 70 % des employés ont choisi un café.

On note C l'état « L'employé choisit un café » et T l'état « L'employé choisit un thé ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note :

- c_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un café le jour n » ;
- t_n la probabilité de l'évènement « un employé, pris au hasard, choisit un thé le jour n » ;
- P_n la matrice $(c_n \quad t_n)$ correspondant à l'état probabiliste le jour n .

1. Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T .

2. Déterminer la matrice P_1 donnant l'état probabiliste le premier jour.

3. La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre C et T est $M = \begin{pmatrix} 0,97 & 0,03 \\ 0,02 & 0,98 \end{pmatrix}$.

Déterminer la probabilité, arrondie au centième, qu'un employé choisisse un thé le quatrième jour.

4. a. Montrer que l'état stable est $(0,4 \quad 0,6)$.

b. Est-ce que la société CAFTHÉ avait raison quant à l'utilisation de la machine à café à long terme ?

5. a. Exprimer P_{n+1} en fonction de P_n .
En déduire que pour tout entier n , on a $c_{n+1} = 0,95 \times c_n + 0,02$.
- b. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	A est un réel i et n sont des entiers naturels
Entrée :	Saisir n
Initialisation :	Affecter à A la valeur 0,70
Traitement :	Pour i de 1 à n Affecter à A la valeur $0,95 \times A + 0,02$ Fin Pour
Sortie :	Afficher A

En faisant apparaître les différentes étapes, donner la valeur affichée par cet algorithme lorsque la valeur de n est égale à 3.

Que permet de déterminer cet algorithme ?