

Alors qu'une entreprise A possédait le monopole de l'accès à internet des particuliers, une entreprise concurrente B est autorisée à s'implanter.

Lors de l'ouverture au public en 2010 des services du fournisseur d'accès B, l'entreprise A possède 90% du marché et l'entreprise B possède le reste du marché.

Dans cet exercice, on suppose que chaque année, chaque internaute est client d'une seule entreprise A ou B.

On observe à partir de 2010 que chaque année, 15% des clients de l'entreprise A deviennent des clients de l'entreprise B, et 10% des clients de l'entreprise B deviennent des clients de l'entreprise A.

Pour tout entier naturel n , on note a_n la probabilité qu'un internaute de ce pays, choisi au hasard, ait son accès à internet fourni par l'entreprise A pour l'année $2010 + n$, et b_n , la probabilité pour que son fournisseur d'accès en $2010 + n$ soit l'entreprise B.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année $2010 + n$ et on a ainsi $a_0 = 0,9$ et $b_0 = 0,1$.

PARTIE A

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste.
2.
 - a. Déterminer la matrice de transition M de ce graphe.
 - b. Montrer qu'en 2013, l'état probabiliste est environ $(0,61 \quad 0,39)$.
 - c. Déterminer l'état stable $P_n = (a \quad b)$ de la répartition des clients des entreprises A et B. Interpréter le résultat.

PARTIE B

Lors d'une campagne de marketing l'entreprise B distribue un stylo ou un porte-clés ; il en coûte à l'entreprise 0,80 € par stylo et 1,20 € par porte-clés distribué.

À la fin de la journée l'entreprise a distribué 550 objets et cela lui a coûté 540 €.

On cherche le nombre s de stylos et le nombre c de porte-clés distribués.

1. Écrire un système traduisant cette situation.
2. Montrer que le système précédent est équivalent à $R \times X = T$ où $R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0,8 & 1,2 \end{pmatrix}$ et X et T sont des matrices que l'on précisera.
3. Résoudre le système à l'aide de la calculatrice. Interpréter le résultat.