Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note a_n la probabilité que Léa se connecte le n-ième jour et b_n la probabilité qu'elle ne se connecte pas le n-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1$^{\text{er}}$ jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.
   b. Préciser la matrice M de transition associée à ce graphe.
   c. Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.
2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.
3. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \dfrac{8}{9}$.
   a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.
   b. Exprimer u_n puis a_n en fonction de n.
4. **a.** Déterminer en justifiant la limite de (a_n).
   b. Interpréter ce résultat.