EXERCICE 2 *(5 points)*

Les questions 1 et 2 peuvent être traitées de façon indépendante.

1. Dans une région, on considère trois types de temps : beau, variable, pluvieux.
   On sait que :

   – S'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{6}$.

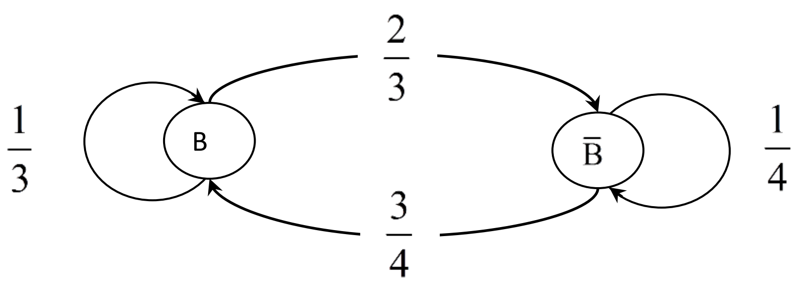
   – Si le temps est variable, la probabilité qu'il soit variable le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il pleuve est $\frac{1}{2}$.

   – S'il pleut, la probabilité qu'il pleuve le lendemain est $\frac{1}{4}$ et la probabilité qu'il fasse beau est $\frac{1}{2}$.

   On note B : «le temps est beau»; V : « le temps est variable » ; P : « le temps est pluvieux ».

   a. Représenter la situation par un graphe probabiliste.
   b. Donner la matrice de transition de ce graphe. Les sommets B, V, P seront rangés dans cet ordre.
   c. Pour tout entier naturel n, l'état probabiliste dans n jours est défini par la matrice ligne $P_n = \begin{pmatrix} b_n & v_n & p_n \end{pmatrix}$ où b_n désigne la probabilité qu'il fasse beau dans n jours, v_n la probabilité que le temps soit variable dans n jours et p_n la probabilité qu'il pleuve dans n jours. Aujourd'hui il fait beau, on a donc $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ matrice ligne décrivant l'état initial. Déterminer la probabilité de chaque type de temps dans 2 jours.

2. Dans une autre région, on note B : « il fait beau » $\overline{\mathrm{B}}$: « il ne fait pas beau ».
   Les variations du temps sont représentées par le graphe suivant :



   a. Donner la matrice de transition T de ce graphe.
   b. Soit $Q = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$. Déterminer x et y tels que $Q = QT$ et interpréter le résultat.