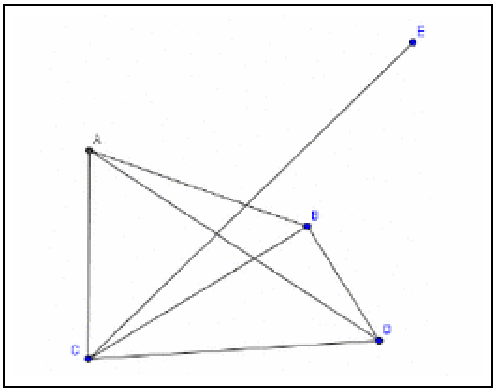
Un graphe est un schéma des relations existant entre les éléments d'un ensemble. Par exemple, un coursier doit choisir le meilleur itinéraire pour livrer ses clients en un temps minimal. Les domiciles et les routes les joignant constituent un graphe. Les liaisons sont pondérées par les durées de parcours.
À tout graphe on peut associer une matrice.
Le renouvellement d'une expérience aléatoire se représente par un graphe probabiliste comportant deux éléments : 1 (réussite) et 0 (échec). Les boucles sont pondérées par les probabilités d'obtenir la même issue. Les autres liaisons sont pondérées par la probabilité d'obtenir une issue différente. La matrice associée est une matrice 2×2, appelée matrice de transition.

1. Quels mots pour décrire un graphe ?

Le graphe ci-dessous représente les liens d'amitié entre cinq membres d'un réseau social.



Zoom

Les points A, B, C, D et E sont les **sommets** du graphe. Le graphe est d'**ordre** 5, car il y a cinq sommets.
Les sommets A et B sont **adjacents**, car ils sont reliés par une **arête**.
A est un **sommet de degré** 3, car A possède trois amis.
Le **sous-graphe** formé par les points A, B, C et D est **complet**, car tous ses sommets sont deux à deux adjacents.
Propriété 1 : *La somme des degrés d'un graphe est le double du nombre d'arêtes.*

2. Que signifie colorer un graphe ?

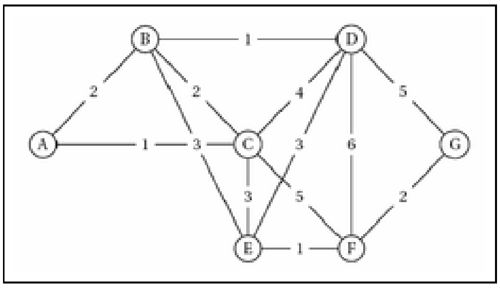
Colorer un graphe, c'est affecter une couleur à chaque sommet sans que deux sommets adjacents aient la même.
Le **nombre chromatique** est le nombre minimum de couleurs nécessaires.
Propriété 2 : *Si Δ est le degré maximal d'un graphe et γ l'ordre d'un sous-graphe, alors le nombre chromatique n vérifie* $\gamma \leqslant n \leqslant \Delta + 1$.

3. Comment utiliser le théorème d'Euler ?

Deux sommets sont reliés par une **chaîne** lorsqu'on peut aller de l'un à l'autre en longeant les arêtes.
Pour qu'une chaîne soit **eulérienne**, il faut que chaque arête soit utilisée une et une seule fois.
Si l'origine et l'extrémité sont identiques, on a affaire à un **cycle**.
Un graphe est **connexe** s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques.
Propriété 3 (théorème d'Euler) : *Si un graphe connexe a deux sommets de degré impair, alors il admet une chaîne eulérienne ayant ces deux segments pour extrémités.*
Si tous les sommets sont de degré pair, alors le graphe admet un cycle eulérien.

4. Comment déterminer la plus courte chaîne d'un arbre pondéré ?

Un graphe est **pondéré** lorsqu'un nombre positif est attribué à chaque arête.
La plus courte chaîne est la chaîne de poids minimal.
Exemple (*d'après baccalauréat ES, national, juin 2009*) :
Le graphe représente le plan d'une ville. Les services techniques sont en A. Les autres sommets correspondent aux différents espaces verts. Les arêtes sont pondérées par le nombre de feux tricolores rencontrés.
En utilisant l'algorithme de Dijkstra, proposer un trajet rencontrant le minimum de feux tricolores de A à G.



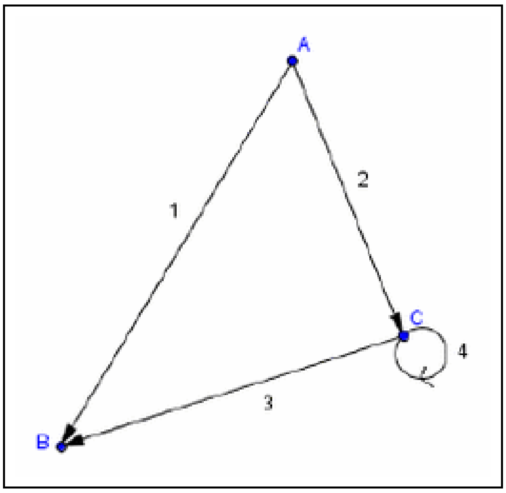
En première ligne, on affecte le coefficient 0 (pas de feu tricolore) à l'origine A et ∞ aux autres sommets.
En seconde ligne, on indique les coefficients des deux sommets B et C, adjacents à A. On retient C, celui de plus petit coefficient.
En troisième ligne, on indique les coefficients des quatre sommets B, D, E et F, adjacents à C. On retient B, celui de plus petit coefficient (en colonne B on reporte 2, car la chaîne A – B est plus courte que la chaîne A – C – B).
Etc.
Le tableau comporte sept lignes puisqu'il y a sept sommets.

A	B	C	D	E	F	G	Point fixé	Coefficient
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A	0
	0+2 2(A)	0+1 1(A)	∞	∞	∞	∞	C	1
	1+2 2(A)		1+4 5(C)	1+3 4(C)	1+5 6(C)	∞	B	2
			2+1 3(B)	4(C)	6(C)	∞	D	3
				4(C)	3+6 6(C)	3+5 8(D)	E	4
					4+1 5(E)	8(D)	F	5
						5+2 7(F)	G	7

On lit ensuite de droite à gauche : G $\leftarrow$ F $\leftarrow$ E $\leftarrow$ C $\leftarrow$ A.
Le trajet A – C – E – F – G comporte un minimum de 7 feux tricolores.

5. Comment associer une matrice à un graphe ?

À chaque terme aij de la matrice on associe le nombre de relations du sommet i avec le sommet j.
Par exemple, le **graphe pondéré orienté** ci-dessous :



Zoom

est représenté par la matrice :

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Propriété 4 : Si A est la matrice associée à un graphe, alors le terme a_{ij} de la matrice An est le nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j.

6. Qu'est-ce qu'un graphe probabiliste ?

Un graphe est **probabiliste** lorsque la somme des poids des arêtes issues de tout sommet est égale à 1.
La matrice associée à un graphe probabiliste est une matrice de transition.
Propriété 5 : *Si P_0 est la matrice ligne de l'état initial, P_n la matrice de l'étape n et M la matrice de transition, alors* $P_n = P_0 \times M^n$.
Propriété 6 : *Dans le cas d'un graphe probabiliste d'ordre 2, si la matrice de transition ne comporte pas de 0, les états P_n convergent vers un état P, indépendant de l'état initial P_0.*
On a alors P = P × M.