EXERCICE 2 *(5 points)*

Les parties I et II sont indépendantes.

PARTIE I (*calculs exacts demandés*)

Sur une route, deux intersections successives "a" et "b" sont munies de feux tricolores. On suppose que ces feux ne sont pas synchronisés et fonctionnent de manière indépendante. On admet que :

La probabilité que le feu de "a" soit vert est égale à $\frac{3}{4}$

La probabilité que le feu de "b" soit vert est égale à $\frac{1}{2}$.

On note A l'évènement : « le feu de "a" est vert », B l'évènement « le feu de "b" est vert ».

Un automobiliste passe successivement aux deux intersections "a" et " b".

1) Calculer la probabilité qu'à son passage, les deux feux soient verts.
2) Calculer la probabilité qu'à son passage, il rencontre au moins un feu vert.

PARTIE II (*résultats demandés à 10^{-2} près*)

Pour se rendre à son travail, Mathurin rencontre une succession d'intersections de feux tricolores dont le fonctionnement est décrit ci-dessous :

À chaque intersection :

- Si le feu est vert, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,9 ou sera rouge avec la probabilité 0,05.
- Si le feu est orange, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,1 ou sera vert avec la probabilité 0,8.
- Si le feu est rouge, il le sera à l'intersection suivante avec la probabilité 0,5 ou sera orange avec la probabilité 0,05.

n étant un entier naturel non nul, on note :

- V_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu vert à la *n*-ième intersection,
- O_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu orange à la *n*-ième intersection,
- R_n la probabilité que Mathurin rencontre un feu rouge à la *n*-ième intersection,
- $P_n = [\ V_n\ \ O_n\ \ R_n\ ]$ la matrice traduisant l'état probabiliste du *n*-ième feu tricolore.

1) a) Construire un graphe probabiliste pour décrire cette situation.

   b) Donner la matrice de transition *M* complétée de ce graphe : $M = \begin{bmatrix} \cdots & 0,05 & 0,05 \\ 0,8 & \cdots & 0,1 \\ 0,45 & \cdots & 0,5 \end{bmatrix}$

2) a) Si le premier feu rencontré est vert, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

   b) On donne $P_3 = [0,87\ \ 0,05\ \ 0,08]$. Quelle est la probabilité que le quatrième feu soit vert ?

3) Si le premier feu rencontré est rouge, donner la matrice P_1 de l'état initial puis calculer P_2.

4) On remarque que, quelle que soit la couleur du premier feu rencontré, on obtient à partir d'un certain rang *n* : $P_n = [0,85\ \ 0,05\ \ 0,10]$.

   Donner une interprétation concrète de ce résultat.