

**EXERCICE 3** (5 points)

Par suite d'une forte augmentation du prix des carburants de 2007 à 2008, certains salariés d'une entreprise changent de mode de déplacement pour se rendre sur leur lieu de travail.

En 2007, 60 % des salariés utilisaient leur voiture personnelle.

En 2008, 30 % des salariés utilisant leur voiture en 2007 ne l'utilisent plus et 5 % des personnes ne l'utilisant pas en 2007 l'utilisent en 2008.

On appelle les états suivants :

A l'état : « la personne utilise sa voiture » ;

B l'état : « la personne n'utilise pas sa voiture ».

On suppose que cette évolution se poursuit d'une année à l'autre à partir de 2008 et on appelle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $P_n$  la matrice ligne donnant l'état probabiliste des moyens de déplacement des salariés de cette entreprise au cours de l'année (2007 +  $n$ ).

On pose  $P_n = (a_n \quad b_n)$  et on a  $P_0 = (0,6 \quad 0,4)$ .

- Tracer un graphe probabiliste représentant la situation décrite ci-dessus.
- Donner la matrice de transition correspondant à ce graphe probabiliste, en respectant l'ordre alphabétique des sommets.
- En supposant que cette évolution se poursuive et en utilisant la question précédente, quelle est la probabilité qu'un salarié de cette entreprise utilise sa voiture personnelle en 2009 ? En 2010 ? (On arrondira les résultats obtenus au centième).
- Démontrer que pour tout entier naturel  $n$ , on a la relation :  $a_{n+1} = 0,7a_n + 0,05b_n$ .  
En déduire que  $a_{n+1} = 0,65a_n + 0,05$ .
  - On admet que  $a_n$  peut alors s'écrire, pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = \frac{1}{7} + \frac{16}{35} \times 0,65^n$ .  
Vérifier la validité de cette formule pour  $a_0$ ,  $a_1$  et  $a_2$ .
- Déterminer la limite de la suite  $(a_n)$ .
  - En supposant que cette évolution se poursuive, est-il possible d'envisager qu'à terme aucun des salariés de cette entreprise n'utilise sa voiture personnelle pour aller au travail ? Justifier la réponse.