Partie A

Deux opérateurs Alpha et Bravo se partagent le marché de la téléphonie mobile dans un pays.
En 2015, l'opérateur Alpha possède 30 % du marché de téléphonie mobile. Le reste appartient à l'opérateur Bravo.
On étudie l'évolution dans le temps du choix des abonnés de 2015 pour l'un ou l'autre des opérateurs. Chaque abonné conserve un abonnement téléphonique, soit chez l'opérateur Alpha soit chez l'opérateur Bravo.
On estime que, chaque année :

- 12 % des abonnés de l'opérateur Alpha le quittent et souscrivent un abonnement chez l'opérateur Bravo.
- 86 % des abonnés de l'opérateur Bravo lui restent fidèles, les autres le quittent pour l'opérateur Alpha.

On modélise cette situation par un graphe probabiliste à deux sommets Alpha et Bravo :

- A est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Alpha » ;
- B est l'évènement : « l'abonné est chez l'opérateur Bravo ».

1. Dessiner ce graphe probabiliste.

On admet que la matrice de transition de ce graphe probabiliste, en considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, est : $M = \begin{pmatrix} 0,88 & 0,12 \\ 0,14 & 0,86 \end{pmatrix}$.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Alpha l'année $2015 + n$;
- b_n la probabilité qu'un abonné soit chez l'opérateur Bravo l'année $2015 + n$.

On note $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$ la matrice ligne de l'état probabiliste pour l'année $2015 + n$.

2. Donner a_0 et b_0.

3. Montrer qu'en 2018, il y aura environ 44,2 % des abonnés chez l'opérateur Alpha.

4. Les deux opérateurs voudraient connaître la répartition de l'ensemble des abonnés sur le long terme. On note $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ l'état stable de la répartition des abonnés.

a. Montrer que les nombres x et y sont solutions du système $\begin{cases} 0,12x - 0,14y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases}$

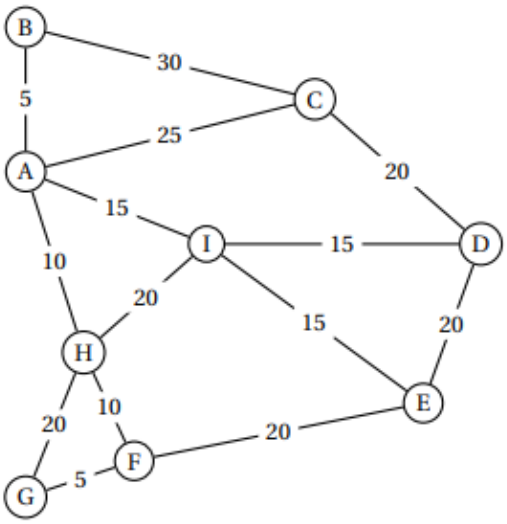
b. Résoudre le système précédent dans l'ensemble des réels.

c. Déterminer la répartition des abonnés entre les deux opérateurs au bout d'un grand nombre d'années. Arrondir les pourcentages à 0,1 %.

Partie B

Un opérateur français doit développer son réseau de fibre optique dans la région des stations de ski notées A, B, C, D, E, F, G, H, I à l'approche de la saison touristique. À ce jour, seule la station C est reliée au réseau national de fibre optique.
Le coût des tronçons du réseau de fibre optique varie selon le relief des montagnes et des vallées.
L'opérateur a mené une étude afin de déterminer son plan de déploiement.
Dans le graphe ci-dessous :

- les sommets représentent les stations de ski ;
- les arêtes représentent les différents tronçons qu'il est possible de déployer ;
- le poids de chaque arête correspond au coût associé, en milliers d'euros.



1. À l'aide de l'algorithme de Dijkstra, déterminer le tracé de fibre optique le moins cher à déployer, entre les stations C et G.
2. Déterminer, en milliers d'euros, le coût de ce tracé.