

Les jeunes abonnés (c'est-à-dire de moins de 12 ans) inscrits à une médiathèque se voient proposer une formule d'emprunt mensuel unique : chaque mois, chacun de ces abonnés peut choisir d'emprunter exclusivement soit un livre, soit un film en DVD. On suppose d'une part que le nombre d'inscrits ne varie pas et d'autre part que tous les abonnés de moins de 12 ans respectent cette formule et réalisent un emprunt chaque mois.

Les statistiques réalisées lors des mois précédents sur les choix d'emprunt des jeunes abonnés permettent au responsable de la médiathèque de constater que l'on peut modéliser ainsi la situation :

d'un mois à l'autre,

- 89 % des jeunes abonnés ayant choisi d'emprunter un livre, optent encore pour un livre le mois suivant ;
- parmi les jeunes abonnés ayant emprunté un film, 14 % changent le mois suivant en décidant de choisir un livre.

Lors du lancement de cette formule d'emprunt, en janvier 2016, 80 % des abonnés de moins de 12 ans empruntent un livre.

Chaque mois, on choisit au hasard un abonné de moins de 12 ans de cette médiathèque, et pour tout entier naturel  $n$ , on note :

- $a_n$  la probabilité que cet abonné emprunte un livre le  $n$ -ième mois après janvier 2016 ;
- $b_n$  la probabilité que cet abonné emprunte un film le  $n$ -ième mois après janvier 2016 ;
- $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix}$  la matrice ligne traduisant l'état probabiliste le  $n$ -ième mois après janvier 2016.

Ainsi  $P_0 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$ .

1. a. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B, où :

- A est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un livre » ;

- B est l'état « le jeune abonné choisit d'emprunter un film ».
  - b.** Donner la matrice de transition  $M$  associée à ce graphe, en prenant les sommets A et B dans cet ordre.
  - c.** Déterminer la répartition des jeunes abonnés selon leur choix d'emprunt, en février 2016 et en mars 2016.
- 2. a.** Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,89a_n + 0,14b_n$ .
- b.** En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_{n+1} = 0,75a_n + 0,14$ .
- c.** Pour déterminer au bout de combien de mois le pourcentage de jeunes abonnés empruntant un livre deviendra pour la première fois strictement inférieur à 60 %, on décide de programmer un algorithme. Modifier l'algorithme ci-dessous pour qu'il permette d'afficher la réponse à cette question.

*Initialisation*

$a$  prend la valeur 0,8

$n$  prend la valeur 1

*Traitement*

Tant que  $a \geq 0,6$

$a$  prend la valeur  $0,85 \times a + 0,14$

Fin Tant que

*Sortie*

Afficher  $n$

- 3.** Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier naturel  $n$  par :  $u_n = a_n - 0,56$ .
- a.** Démontrer que la suite  $(u_n)$  est géométrique de raison 0,75 et préciser son terme initial.
- b.** En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  :  $a_n = 0,24 \times 0,75^n + 0,56$ .
- c.** Résoudre dans l'ensemble des entiers naturels l'inéquation  $a_n < 0,6$  et interpréter le résultat dans le contexte.
- d.** À long terme, que peut-on penser de la probabilité qu'un jeune abonné choisisse d'emprunter un livre ?