

Dans une salle de sport, trois activités sont proposées : Pilates (P), Step (S) et Zumba (Z).

D'une semaine sur l'autre les abonnés peuvent changer d'activité.

Au 1^{er} septembre 2015, il y a 10 % des abonnés inscrits en Pilates, 85 % en Step et 5 % en Zumba.

D'après l'analyse des données des années précédentes, le gérant prévoit que, d'une semaine sur l'autre :

- Si l'abonné était en Pilates, la semaine suivante il conserve Pilates dans 30 % des cas, sinon il choisit Step dans 10 % des cas et Zumba dans 60 % des cas.
- Si l'abonné était en Step, la semaine suivante il conserve Step dans 30 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 50 % des cas et Zumba dans 20 % des cas.
- Si l'abonné était en Zumba, la semaine suivante il conserve Zumba dans 20 % des cas, sinon il choisit Pilates dans 20 % des cas et Step dans 60 % des cas.

On considère qu'il n'y a pas de nouveaux abonnés et pas de départ tout au long de l'année. Soit $E_n = (p_n \quad s_n \quad z_n)$, la matrice ligne décrivant l'état probabiliste de la répartition parmi les trois activités P, S et Z, n semaines après le 1^{er} septembre 2015.

1. Donner, sans justification, la matrice E_0 .
2. Traduire la situation par un graphe probabiliste de sommets P, S et Z.
3. On donne M la matrice carrée 3×3 de transition respectant l'ordre P, S et Z.

$$M = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,6 \\ 0,5 & 0,3 & 0,2 \\ 0,2 & 0,6 & 0,2 \end{pmatrix}.$$

- a. Préciser la signification du coefficient 0,5 dans la matrice M .
 - b. Calculer E_1 .
 - c. Déterminez la répartition prévisible dans chaque activité au bout de trois semaines.
4. Peut-on affirmer, à 10^{-2} près, qu'au bout de 6 semaines environ $1/3$ des abonnés se répartissent dans chaque activité.
 5. Au 1^{er} septembre 2015 on compte 120 abonnés dans cette salle de sport. Combien peut-on prévoir d'abonnés dans chaque activité, 8 semaines après cette date ?
 6.
 - a. Conjecturer la valeur exacte des coefficients de la matrice ligne E correspondant à l'état probabiliste stable.
 - b. Vérifier cette conjecture.