

EXERCICE 3. Communs à tous (6 points)

L'entreprise CoTon produit du tissu en coton. Celui-ci est fabriqué en 1 mètre de large et pour une longueur x exprimée en kilomètre, x étant compris entre 0 et 10.

Le coût total de production en euros de l'entreprise CoTon est donné en fonction de la longueur x par la formule

$$C(x) = 15x^3 - 120x^2 + 500x + 750.$$

Le graphique de l'annexe donne la représentation graphique de la fonction C .

Les deux parties A et B de cet exercice sont indépendantes

Partie A : Étude du bénéfice

Si le marché offre un prix p en euros pour un kilomètre de ce tissu, alors la recette de l'entreprise CoTon pour la vente d'une quantité x est égal à $R(x) = px$.

- ① Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_1 d'équation $y = 400x$.
Expliquer, au vu de ce tracé, pourquoi l'entreprise CoTon ne peut pas réaliser un bénéfice si le prix p du marché est égal à 400 euros.
- ② Dans cette question on suppose que le prix du marché est égal à 680 euros.
 - (a) Tracer sur le graphique de l'annexe 2 la droite D_2 d'équation $y = 680x$.
Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, pour quelles quantités produites et vendues, l'entreprise CoTon réalise un bénéfice si le prix p du marché est de 680 euros.
 - (b) On considère la fonction B définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par $B(x) = 680x - C(x)$.
Démontrer que pour tout $x \in [0 ; 10]$ on a : $B'(x) = -45x^2 + 240x + 180$
 - (c) Étudier les variations de la fonction B sur $[0 ; 10]$.
En déduire pour quelle quantité produite et vendue le bénéfice réalisé par l'entreprise CoTon est maximum. Donner la valeur de ce bénéfice.

Partie B : Étude du coût moyen

On rappelle que le coût moyen de production C_M mesure le coût par unité produite. On considère la fonction C_M définie sur l'intervalle $[0 ; 10]$ par

$$C_M(x) = \frac{C(x)}{x}.$$

- ① Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $]0 ; 10]$ on a :

$$C'_M(x) = \frac{30(x-5)(x^2+x+5)}{x^2}.$$

- ② (a) Démontrer que pour tout $x \in]0 ; 10]$, $C'_M(x)$ est du signe de $(x-5)$.
En déduire les variations de la fonction C_M sur l'intervalle $]0 ; 10]$.
- (b) Pour quelle quantité de tissu produite le coût moyen de production est-il minimum ?
Que valent dans ce cas le coût moyen de production et le coût total ?

Annexe à rendre avec la copie