

Un supermarché souhaite acheter des fruits à un fournisseur.

Ce fournisseur propose des prix au kilogramme, dégressifs en fonction du poids de fruits commandé.

Pour une commande de x kilogrammes de fruit, le prix $P(x)$ en euros du kilogramme de fruits est

donné par la formule : $P(x) = \frac{x+300}{x+100}$ pour $x \in [100; +\infty[$.

Par exemple si le supermarché achète 300 kilogrammes de fruits, ces fruits lui sont vendus

$$P(300) = \frac{600}{400} = 1,5 \text{ euros le kilogramme.}$$

Dans ce cas, le supermarché devra payer $300 \times 1,5 = 450$ euros au fournisseur pour cette commande.

PARTIE A Étude du prix P proposé par le fournisseur

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x)$
2. Montrer que $P'(x) = -\frac{200}{(x+100)^2}$ sur $[100; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction P .

PARTIE B Étude de la somme S à dépenser par le supermarché

On appelle $S(x)$ la somme en euros à dépenser par le supermarché pour une commande de x kilogrammes de fruits (ces fruits étant vendus par le fournisseur au prix de $P(x)$ euros par kilogramme).

Cette somme est donc égale à $S(x) = xP(x)$ pour $x \in [100; +\infty[$.

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x)$.
2. Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$: $S'(x) = \frac{x^2 + 200x + 30000}{(x+100)^2}$.
3. Montrer que pour tout x appartenant à $[100; +\infty[$: $S(x) = x + 200 - 20000 \times \frac{1}{x+100}$.
4. En déduire une primitive T de S sur $[100; +\infty[$.

PARTIE C Étude de différentes situations

Les questions suivantes peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

1. Le magasin dispose d'un budget de 900 euros pour la commande de fruits.
Préciser, au kilogramme près, le poids maximum de fruits que le magasin peut commander sans dépasser son budget. On justifiera la réponse.
2. On rappelle que la valeur moyenne M d'une fonction f définie et continue sur un intervalle $[a ; b]$ est donnée par la formule $M = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$.
Le supermarché estime acheter régulièrement entre 400 et 600 kilogrammes de fruits à ce fournisseur.

Déterminer la valeur moyenne de S sur $[400 ; 600]$ et donner le résultat arrondi à l'unité.