

PROBLEME (10 points)**• Question préliminaire**

Vérifier que le nombre $\alpha = -1 + \ln 125$ est solution de l'équation (E) :

$$e^{x+1} - 10^4 e^{-(x+1)} - 45 = 0.$$

En donner la valeur décimale approchée à 10^{-2} près par excès. On admettra que α est la seule solution de (E).

• Offre et demande

D'après une étude de marché, l'offre $f(x)$ et la demande $g(x)$ d'un produit de prix unitaire x sont telles que :

$$f(x) = 100 (e^{x+1} - 45)$$

$$g(x) = 10^6 e^{-(x+1)}$$

1. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $f(x)$ et $g(x)$ sont positives ou nulles.

On désignera par I l'intervalle trouvé ; cet intervalle est dît «intervalle de validité du modèle».

2. Déterminer la valeur x telle que $f(x) = g(x)$, appelée «prix d'équilibre».

3. Étudier les variations de f et de g sur l'intervalle I (on précisera les limites en $+\infty$).

4. Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les unités graphiques sont : 2 cm pour unité sur l'axe des abscisses, et 1 cm pour 2 000 unités sur l'axe des ordonnées.

a. Tracer les courbes représentatives de f et de g dans P .

b. Vérifier graphiquement le prix d'équilibre trouvé à la question 2.

5. On considère la fonction E_f définie sur I par :

$$E_f(x) = x \frac{f'(x)}{f(x)} \quad (\text{où } f' \text{ désigne la fonction dérivée de } f).$$

Le nombre $E_f(x)$ s'appelle «élasticité de l'offre par rapport au prix x » ; on admet qu'il indique le pourcentage de variation de l'offre pour un accroissement de 1 % d'un prix x donné. $E_f(x)$ est négatif lors d'une diminution de l'offre.

a. Calculer $E_f(x)$.

b. On considère le prix $x = 3,8$. Pour un accroissement de 1% de ce prix, quel est le pourcentage de variation de l'offre