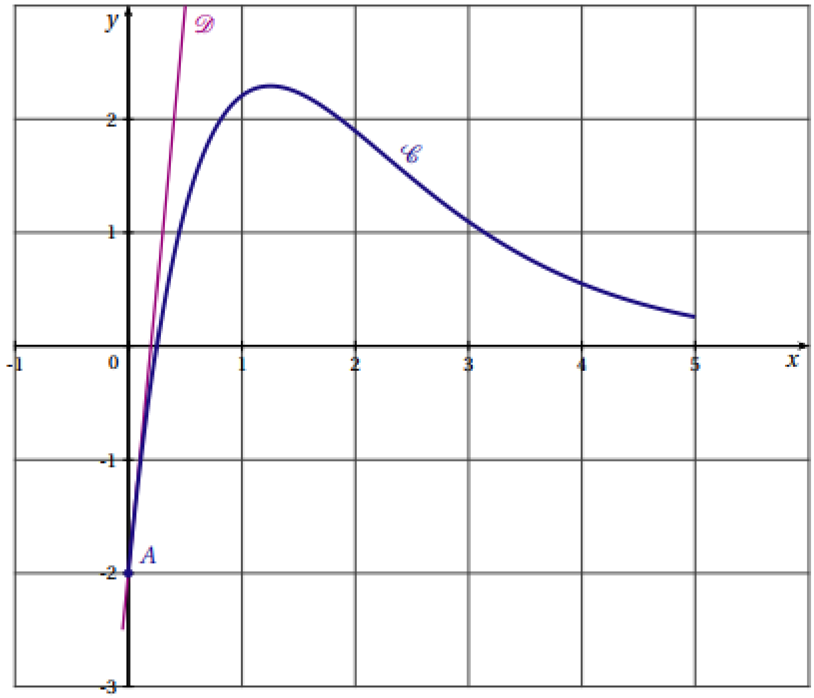
Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $f(x) = (ax-2)\mathrm{e}^{-x}$, où a est un nombre réel.
On admet dans tout l'exercice que la fonction f est deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;5]$.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous dans un repère d'origine O.



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0;-2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 10x-2$.
On rappelle que f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$.

2. **a.** Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0 ; 5]$ on a :

$$f'(x) = (-ax+a+2)\mathrm{e}^{-x}$$

b. Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

c. Donner l'expression de $f'(x)$.

3. **a.** Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$. On pourra faire un tableau.

b. En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

c. Résoudre sur l'intervalle $[0;5]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu les résultats suivants :

1	$g(x) := (-8 * x + 10) * \exp(-x)$ $\rightarrow g(x) := (-8x + 10)\,\mathrm{e}^{-x}$
2	Dériver $[g(x), x]$ $\rightarrow (8 * x - 18) * \exp(-x)$
3	Résoudre $[(8 * x - 18) * \exp(-x) > 0, x]$ $\rightarrow x > 9/4$

En utilisant ces résultats :

a. Donner l'expression de f'', fonction dérivée seconde de la fonction f.

b. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion dont on donnera la valeur exacte de l'abscisse.