Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,10]$ par

$$f(x) = x + \mathrm{e}^{-x+1}.$$

Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

1	$f(x) := x + \exp(-x+1)$
	// Interprète f // Succès lors de la compilation f
	$x \longrightarrow x + \exp(-x+1)$
2	derive $(f(x))$
	$-\exp(-x+1)+1$
3	solve $(-\exp(-x+1)+1>0)$
	$[x>1]$
4	derive $(-\exp(-x+1)+1)$
	$\exp(-x+1)$

1. Étude des variations de la fonction f
   - **a.** En s'appuyant sur les résultats ci-dessus, déterminer les variations de la fonction f puis dresser son tableau de variation.
   - **b.** En déduire que la fonction f admet un minimum dont on précisera la valeur.
2. Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

Partie B

Une entreprise fabrique des objets. Sa capacité de production est limitée, compte tenu de l'outil de production utilisé, à mille objets par semaine.
Le coût de revient est modélisé par la fonction f où x est le nombre d'objets fabriqués exprimé en centaines d'objets et $f(x)$ le coût de revient exprimé en milliers d'euros.

1. Quel nombre d'objets faut-il produire pour que le coût de revient soit minimum ?

2. Un objet fabriqué par cette entreprise est vendu 12 €. On appelle marge brute pour x centaines d'objets, la différence entre le montant obtenu par la vente de ces objets et leur coût de revient.
   - **a.** Justifier que le montant obtenu par la vente de x centaines d'objets est $1{,}2x$ milliers d'euros.
   - **b.** Montrer que la marge brute pour x centaines d'objets, notée $g(x)$, en milliers d'euros, est donnée par : $g(x) = 0{,}2x - \mathrm{e}^{-x+1}$.
   - **c.** Montrer que la fonction g est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. **a.** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution α sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
   - **b.** Déterminer un encadrement de α d'amplitude $0{,}01$.
4. En déduire la quantité minimale d'objets à produire afin que cette entreprise réalise une marge brute positive sur la vente de ces objets.