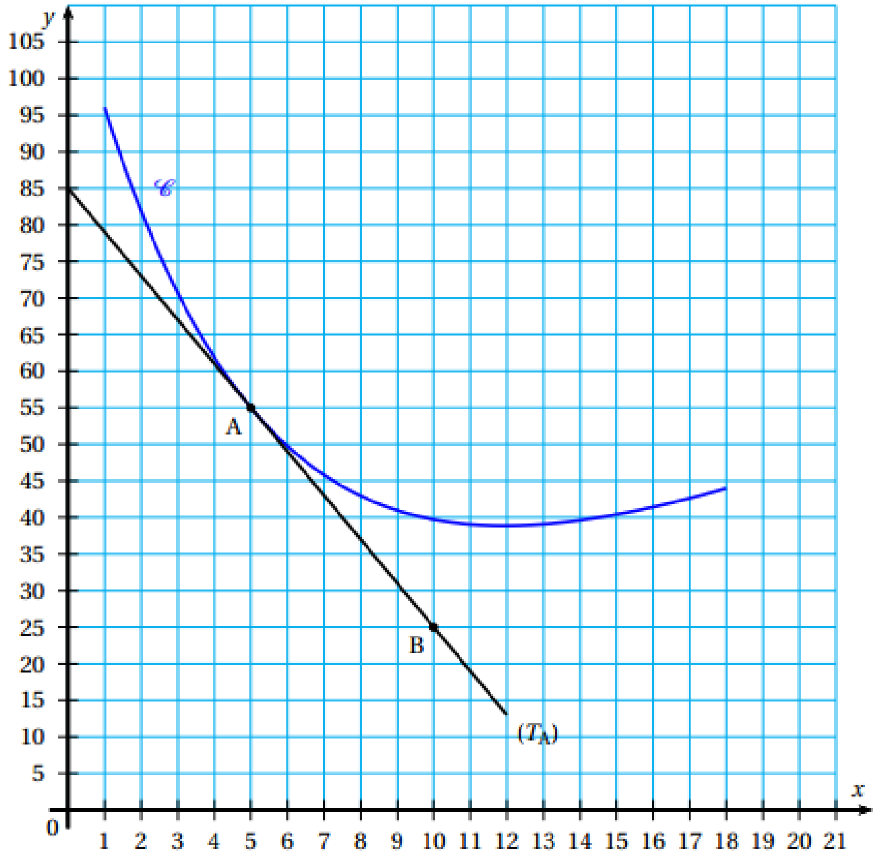
Une entreprise artisanale produit des parasols. Elle en fabrique entre 1) 18 par jour. Le coût de fabrication unitaire est modélisé par une fonction f définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 8].
On note x le nombre de parasols produits par jour et $f(x)$ le coût de fabrication unitaire exprimé en euros.
Dans le repère orthogonal ci-dessous, on a tracé la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f et la tangente (T_A) au point A(5 ; 55). Le point B(10 ; 25) appartient à la tangente (T_A).



On admet que

$$f(x) = 2x + 5 + 40e^{-0,2x+1} \quad \text{pour tout } x \text{ appartenant à l'intervalle } [1\,;18]$$

1. **a.** Déterminer graphiquement la valeur de $f'(5)$ en expliquant la démarche utilisée.
   b. Déterminer l'expression de $f'(x)$ pour tout x appartenant à l'intervalle [1 ; 10].
   c. Expliquer comment retrouver la réponse obtenue dans la question **1. a.**
2. **a.** Montrer que $2 - 8e^{-0,2x+1} \geqslant 0$ est équivalente à $x \geqslant 5 + 5\ln 4$.
   b. En déduire le signe de $f'(x)$ et le tableau de variations de f sur [1 ; 18]. Les valeurs seront arrondies au centime d'euro dans le tableau de variations.
3. Déterminer, par le calcul, le nombre de parasols que doit produire l'entreprise pour que le coût de fabrication unitaire soit minimal.
4. **a.** Montrer que la fonction F définie par $F(x) = x^2 + 5x - 200e^{-0,2x+1}$ est une primitive de f sur l'intervalle [1 ; 18].
   b. Déterminer la valeur exacte de l'intégrale $I = \int_5^{15} f(x)\,dx$.
   c. Interpréter dans le contexte de l'exercice la valeur de $\frac{1}{10}I$.