On considère f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + 1.$$

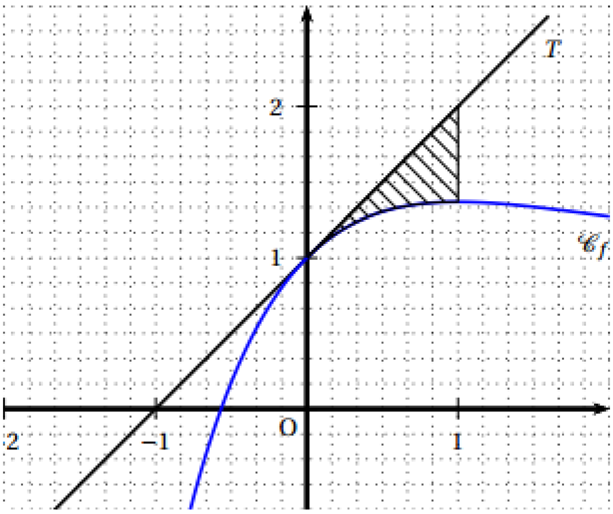
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé du plan et f' la fonction dérivée de f.

1. **a.** Montrer que, pour tout réel x, $f'(x) = \mathrm{e}^{-x}(1-x)$.
   b. En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2. **a.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-1\,;\,0]$.
   b. Donner un encadrement de α à 10^{-1} près.
3. Montrer que l'équation réduite de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = x+1$.
4. L'objectif de cette question est de déterminer la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T.
   À l'aide d'un logiciel de calcul formel, on a obtenu, pour tout réel x, l'expression et le signe de $f''(x)$ où f'' désigne la dérivée seconde de f.

	Instruction	**Réponse**
1	$f(x) = x * \exp(-x) + 1$	$x\mathrm{e}^{-x} + 1$
2	$f''(x) =$ dérivée seconde$[f(x)]$	$\mathrm{e}^{-x}(x-2)$
3	résoudre $[\mathrm{e}^{-x}(x-2) \geqslant 0]$	$x \geqslant 2$

   a. Déterminer le sens de variation de la dérivée f' de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   b. Déterminer l'intervalle de $\mathbb{R}$ sur lequel la fonction est convexe puis celui sur lequel elle est concave.
   c. En déduire la position relative de $\mathscr{C}_f$ par rapport à T sur l'intervalle $]-\infty\,;\,2]$.
5. On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T dans un repère orthonormé.



a. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par

$$F(x) = e^{-x}(-1-x)+x.$$

Montrer que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

b. Calculer, en unités d'aire, l'aire du domaine hachuré compris entre la courbe $\mathscr{C}_f$, la tangente T et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ puis donner le résultat arrondi à 10^{-3} près.