

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax + b)e^{-x}$ où a et b sont deux réels.
On note f' la fonction dérivée de f .

1. Montrer que pour tout nombre réel x , $f'(x) = (a - b - ax)e^{-x}$
2. On donne $f(0) = 1$ et $f'(0) = 3$. En déduire a et b .

PARTIE B

Dans cette partie, on admettra que $a = 4$ et $b = 1$.
Donc pour tout réel x , $f(x) = (4x + 1)e^{-x}$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ (On pourra utiliser le fait que pour tout réel x ,
 $f(x) = \frac{4x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$).
3. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C

Une entreprise produit x centaines d'objets chaque semaine.
Le coût de production, exprimé en milliers d'euros, est défini sur l'intervalle $[0; 5]$ par la fonction f étudiée dans la partie B.

1. Quel est le coût de production maximal hebdomadaire ? On arrondira le résultat à l'euro près.
2. Démontrer que la fonction F définie sur $[0; 5]$ par $F(x) = (-4x - 5)e^{-x}$ est une primitive de la fonction f sur ce même intervalle.
3. a) Calculer $\frac{1}{5} \int_0^5 f(x) dx$. On arrondira le résultat à 10^{-3} près.
b) Quelle interprétation peut-on faire du résultat précédent pour l'entreprise ?