

1^{ère} partie : Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = xe^x - e^x - 8$.

1. En écrivant que $f(x) = e^x(x - 1) - 8$, déterminer la limite de f en $+\infty$.
2. Montrer que $f'(x) = xe^x$ où f' désigne la fonction dérivée de f sur $[0; +\infty[$.
3. Dresser le tableau de variations complet de f sur $[0; +\infty[$.
4. a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet sur $[0; +\infty[$ une unique solution a .
b) Montrer que $2,040 < a < 2,041$.
- c) En utilisant les questions précédentes, déduire le signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x sur $[0; +\infty[$.
5. a) Montrer que la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = xe^x - 2e^x - 8x$ est une primitive de f sur $[0; +\infty[$.
b) Calculer la valeur exacte de $\int_3^5 f(x) dx$.

2^{ème} partie : Application à une situation économique

Une entreprise fabrique x milliers d'objets avec x appartenant à $[0; 5]$.

La fonction f de la 1^{ère} partie modélise les bénéfices ou les pertes de l'entreprise en centaine d'euros.

Pour une quantité x donnée, si $f(x)$ est positif, l'entreprise réalise un bénéfice, et si $f(x)$ est négatif, l'entreprise subit une perte.

En utilisant les résultats de la 1^{ère} partie, répondre aux questions suivantes en justifiant :

1. À partir de combien d'objets produits, l'entreprise commence-t-elle à réaliser des bénéfices?
2. L'entreprise pense produire régulièrement entre 3 et 5 milliers d'objets.
Déterminer la valeur moyenne du bénéfice sur $[3, 5]$ (On donnera le résultat arrondi à l'euro près).