

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = (-4x^2 + 5)e^{-x} + 3$$

On note (\mathcal{C}) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. a. Démontrer que pour tout réel x de $[0 ; +\infty[$, on a :

$$f'(x) = (4x^2 - 8x - 5)e^{-x}.$$

- b. Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

2. a. Démontrer que pour tout $x \geq 0$, on a $f(x) = -\frac{4x^2}{e^x} + \frac{5}{e^x} + 3$.

- b. En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$ (on pourra utiliser le résultat suivant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$).

- c. Interpréter graphiquement cette limite.

3. À l'aide des questions 1. et 2., dresser le tableau de variation de la fonction f .

4. Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution x_0 dans l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Donner une valeur approchée de x_0 à 10^{-2} près.

Partie B

Une entreprise produit de la peinture qu'elle vend ensuite. Toute la production est vendue. Le coût moyen unitaire de cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A :

pour x hectolitres de peinture fabriqués (avec $x \in [0,5 ; 8]$), le nombre $f(x)$ désigne le coût moyen unitaire de production par hectolitre de peinture, exprimé en centaines d'euros (on rappelle qu'un hectolitre est égal à 100 litres).

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle. On pourra utiliser les résultats de la partie A.

Chaque réponse sera justifiée.

1. Déterminer le coût moyen unitaire de production en euros, arrondi à l'euro près, pour une production de 500 litres de peinture.
2. a. Combien de litres de peinture l'entreprise doit-elle produire pour minimiser le coût moyen unitaire de production ? Quel est alors ce coût, arrondi à l'euro près ?
 - b. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 100 euros. À l'aide de la question précédente, déterminer si l'entreprise peut réaliser des bénéfices.

Pour cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

3. Le prix de vente d'un hectolitre de peinture est fixé à 300 euros. On appelle seuil de rentabilité la quantité à partir de laquelle la production est rentable, c'est-à-dire qu'elle permet à l'entreprise de réaliser un bénéfice. Quel est le seuil de rentabilité pour cette entreprise ?