

EXERCICE 4 (6 points)

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.

L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$ par $f(x) = 2xe^{-x}$ où x est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et $f(x)$ le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. a. On rappelle que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{e^x} \right) = 0$. Déterminer la limite de f en $+\infty$.
b. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$ et on note f' sa fonction dérivée. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe pour x élément de l'intervalle $[0 ; +\infty [$.
Donner le tableau complet des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty [$.
2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction f à l'intervalle $[0 ; 5]$.
Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$ est donnée en annexe 2.
 - a. Vérifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par $F(x) = (-2 - 2x)xe^{-x}$ est une primitive de f sur cet intervalle.
 - b. Calculer la valeur moyenne m (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.
On déterminera la valeur exacte de m puis on donnera sa valeur approchée arrondie à 0,01 ppm près.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute.

Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

ANNEXE 2

