

EXERCICE 4 (6 points)**PARTIE A** : Etude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,5;8]$ par $f(x) = 20(x-1)e^{-0,5x}$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[0,5;8]$

- Démontrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0,5;8]$ $f'(x) = 10(-x+3)e^{-0,5x}$
 - Étudier le signe de la fonction f' sur l'intervalle $[0,5;8]$ et en déduire le tableau de variations de la fonction f .
- Construire la courbe représentative (C) de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On prendra pour unités graphiques 2 cm sur l'axe des abscisses et 1 cm, sur l'axe des ordonnées.
- Justifier que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,5;8]$ par $F(x) = \frac{-40(x+1)}{e^{0,5x}}$ est une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0,5;8]$.
- Calculer la valeur exacte de l'intégrale I définie par $I = \int_{1,5}^5 f(x) dx$.

PARTIE B : Application économique

Une entreprise produit sur commande des bicyclettes pour des municipalités.

La production mensuelle peut varier de 50 à 800 bicyclettes.

Le bénéfice mensuel réalisé par cette production peut être modélisé par la fonction f de la partie A de la façon suivante : si, un mois donné, on produit x centaines de bicyclettes, alors $f(x)$ modélise le bénéfice, exprimé en milliers d'euros, réalisé par l'entreprise ce même mois.

Dans la suite de l'exercice, on utilise ce modèle.

- Vérifier que si l'entreprise produit 220 bicyclettes un mois donné, alors elle réalise ce mois-là un bénéfice de 7 989 euros.
 - Déterminer le bénéfice réalisé par une production de 408 bicyclettes un mois donné.
- Pour cette question, toute trace de recherche même non aboutie sera prise en compte.*
Répondre aux questions suivantes en utilisant les résultats de la partie A et le modèle précédent.

Justifier chaque réponse.

- Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire au minimum de bicyclettes pour ne pas travailler à perte ?
- Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice maximum. Préciser alors ce bénéfice à l'euro près.
- Combien, pour un mois donné, l'entreprise doit-elle produire de bicyclettes pour réaliser un bénéfice supérieur à 8 000 euros ?