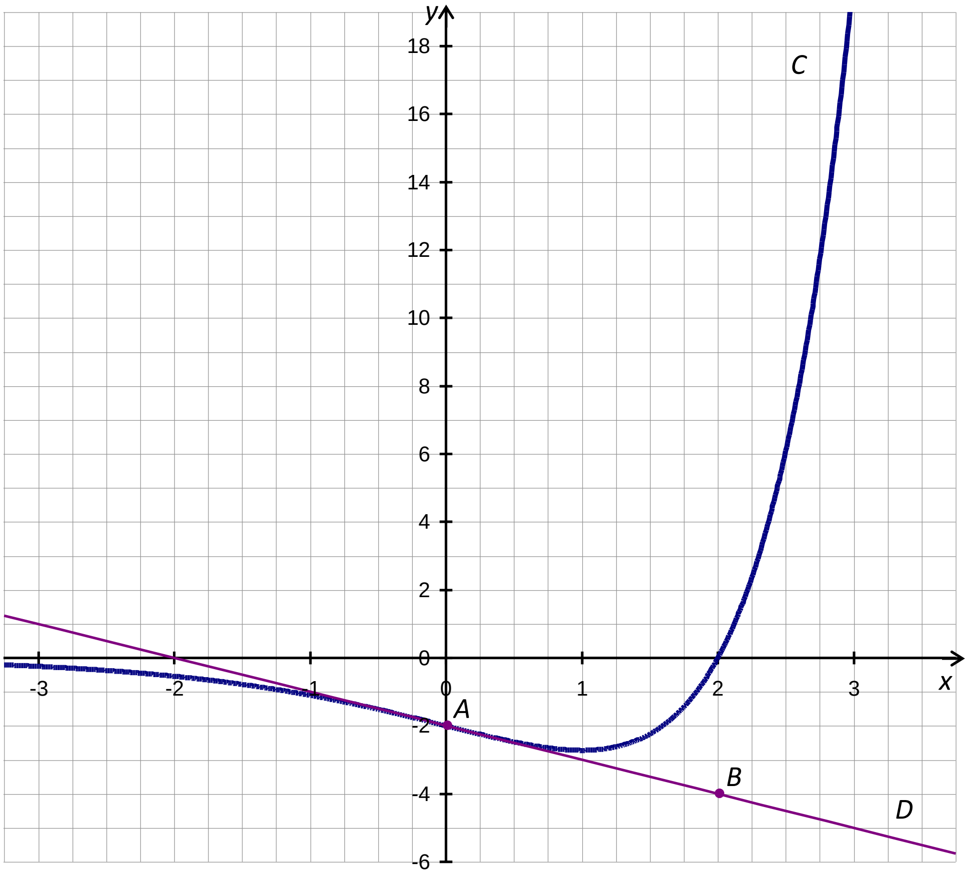
EXERCICE 4 (*6 points*)

PARTIE A

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, la courbe *C* ci-dessous représente une fonction *f* définie sur l'ensemble **R** des nombres réels.

La tangente *D* à la courbe *C* au point $A(0;-2)$ passe par le point $B(2;-4)$.



On désigne par f' la fonction dérivée de f.

1. a) Donner la valeur de $f(0)$.
   b) Justifier que : $f'(0) = -1$.
2. On admet qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout réel x, $f(x) = (x+a)\mathrm{e}^{bx}$.
   a) Vérifier que pour tout réel x, $f'(x) = (bx + ab + 1)\mathrm{e}^{bx}$.
   b) Utiliser les résultats précédents pour déterminer les valeurs exactes des réels a et b.

PARTIE B

On considère maintenant la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = (x-2)\mathrm{e}^{x}$.

1. Donner l'expression de $f'(x)$ pour tout réel x ; en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'ensemble des réels **R**.
2. a) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (on rappelle que $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0$). Interpréter graphiquement le résultat obtenu.
3. a) Montrer que la fonction g définie par $g(x) = (x-3)\mathrm{e}^{x}$ est une primitive de f sur **R**.
   b) Calculer $\int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$.
   c) Préciser le signe de $f(x)$ pour tout x de l'intervalle [2 ;3].
   Déterminer la valeur, en unités d'aire, de l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisse est les droites d'équation $x = 2$ et $x = 3$.

   Donner le résultat sous forme décimale, arrondi au dixième.