EXERCICE 4 *(6 points)*

Dans une entreprise, le résultat mensuel, exprimé en milliers d'euros, réalisé en vendant *x* centaines d'objets fabriqués, est modélisé par la fonction *B* définie et dérivable sur l'intervalle [1 ; 15] par :

$$B(x) = (x-5)\mathrm{e}^{u(x)} + 2 \text{ avec } u(x) = -0,02x^2 + 0,2x - 0,5\,.$$

Si *B*(*x*) est positif il s'agit d'un bénéfice, s'il est négatif il s'agit d'une perte.

1. On note *B*′ la fonction dérivée de la fonction *B* et *u*′ la fonction dérivée de la fonction *u*.
   a. Calculer *u*′(*x*) et démontrer que, pour tout *x* de l'intervalle [1 ; 15], on a :
   $$B'(x) = \left(-0,04x^2 + 0,4x\right)\mathrm{e}^{u(x)}$$
   b. Étudier le signe de *B*′(*x*) sur l'intervalle [1 ; 15] puis dresser le tableau de variations de la fonction *B*.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation*.
   Déterminer le nombre minimum d'objets que l'entreprise doit vendre pour réaliser un bénéfice.

   Pour quel nombre d'objets ce bénéfice est-il maximal ? Et quel est alors ce bénéfice maximal (arrondi à l'euro près) ?
3. La valeur moyenne *m* d'une fonction *f* qui admet des primitives sur un intervalle [*a* ; *b*] avec *a* < *b* est :
   $$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$
   a. Vérifier que $B(x) = -25 \times u'(x)\, e^{u(x)} + 2$.
   b. En déduire l'arrondi au millième de la valeur moyenne de *B* sur [1 ; 15].
   c. Interpréter ce résultat pour l'entreprise.