EXERCICE 4

Les trois parties sont indépendantes

On considère la fonction *f* définie sur l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels par $f(x)=(ax+b)\mathrm{e}^{x-1}+c$, où *a*, *b* et *c* sont trois réels que l'on se propose de déterminer dans la partie A.

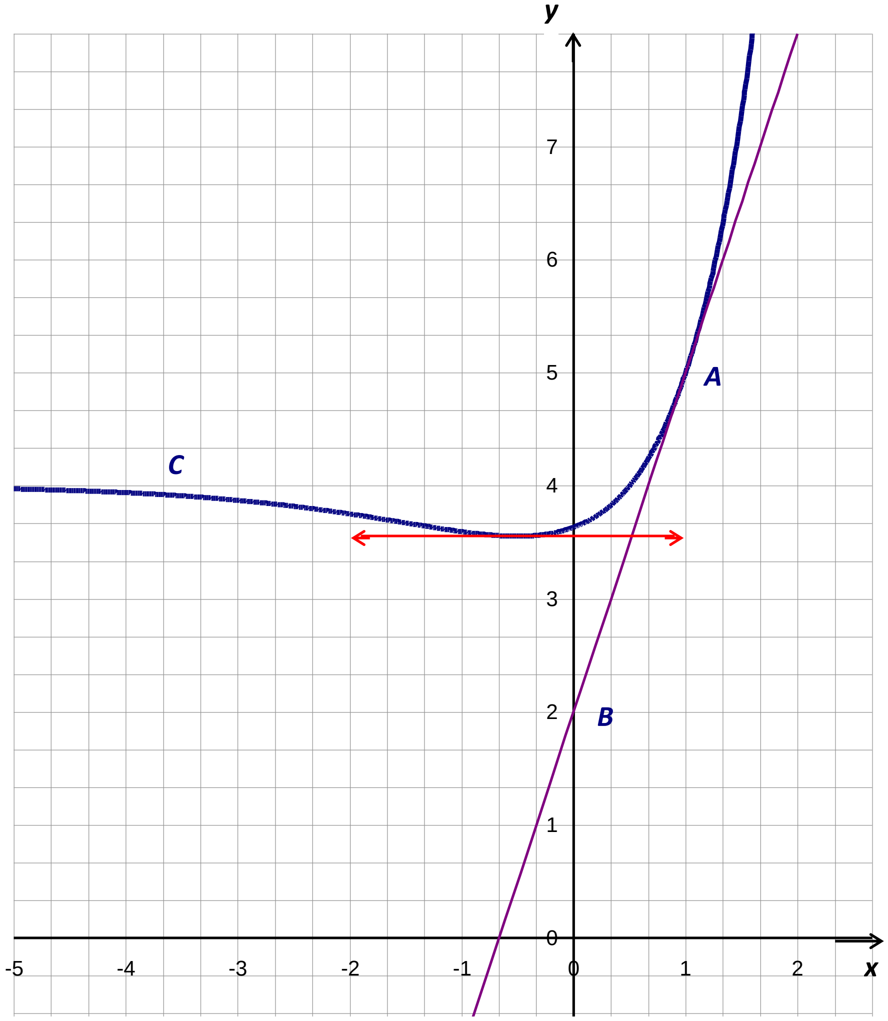
On note f' la fonction dérivée de *f*.

La courbe *C* représentative de *f* dans le plan rapporté à un repère orthonormal est représentée ci-dessous.

La courbe *C* passe par le point A (1 ; 5), elle admet la droite *D* comme tangente en ce point.

Le point B(0 ; 2) appartient à la droite *D*.

La courbe *C* admet également une tangente horizontale au point d'abscisse $-\frac{1}{2}$



PARTIE A

1. a. Préciser les valeurs de $f(1)$ et $f'\left(-\dfrac{1}{2}\right)$.

   b. Déterminer le coefficient directeur de la droite *D*. En déduire $f'(1)$.

2. Montrer que, pour tout réel *x*, $f'(x)=(ax+a+b)\mathrm{e}^{x-1}$.

3. Montrer que *a*, *b* et *c* vérifient le système : $\begin{cases} a+b+c=5 \\ a+2b=0 \\ 2a+b=3 \end{cases}$

   Déterminer les valeurs de *a*, *b* et *c* .

PARTIE B

On admet pour la suite de l'exercice que, pour tout réel *x*, $f(x)=(2x-1)\mathrm{e}^{x-1}+4$.

1. a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

   b. Vérifier que, pour tout réel *x*, $f(x)=\dfrac{2}{\mathrm{e}}x\mathrm{e}^{x}-\dfrac{1}{\mathrm{e}}\mathrm{e}^{x}+4$.

   Que peut-on en déduire pour la courbe *C* ?

2. a. Donner, pour tout réel *x*, l'expression de $f'(x)$.

   b. Établir le tableau de variation de *f*. Déterminer le signe de $f(x)$ pour tout réel *x*.

   c. Montrer que l'équation $f(x)=6$ admet une unique solution réelle α sur l'intervalle [1;2]. On donnera un encadrement de α d'amplitude 0,1.

   Toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.

PARTIE C

1. On considère la fonction *F* définie pour tout réel *x* par $F(x)=(2x-3)\mathrm{e}^{x-1}+4x$. Montrer que *F* est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.

2. Soit Δ la partie du plan située entre la courbe *C*, l'axe des abscisses et les droites d'équations *x* = 0 et *x* = 1.
   Calculer l'aire de la partie Δ exprimée en unités d'aire ; on donnera la valeur exacte et la valeur décimale arrondie au dixième.