EXERCICE 4 *(7 points)*

On s'intéresse à la production mensuelle d'une certaine catégorie d'articles par une entreprise E. On sait que le nombre d'articles produits par mois est compris entre 0 et 500. On suppose que le coût marginal, exprimé en milliers d'euros, peut être modélisé par la fonction *C* définie sur l'intervalle $[0;5]$ par $C(x)=4x+(1-2x)\mathrm{e}^{-2x+3}$ où *x* représente le nombre de centaines d'articles fabriqués.

1. On sait que la fonction coût total, notée C_T , est la primitive de la fonction *C* sur [0 ; 5] qui s'annule pour *x* = 0. Justifier que $C_T(x)=2x^2+x\mathrm{e}^{-2x+3}$.
2. La fonction coût moyen, notée C_M est la fonction définie sur]0 ; 5] par $C_M(x)=\dfrac{C_T(x)}{x}$. Donner une expression de $C_M(x)$ en fonction de *x*.
3. a. Déterminer $C_M'(x)$ où C_M' désigne la fonction dérivée de C_M.
   b. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $1-\mathrm{e}^{-2x+3}=0$.
   c. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $1-\mathrm{e}^{-2x+3}>0$.
   d. En déduire le sens de variations de C_M sur]0 ; 5].
4. Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal et quel est ce coût en euros ?
5. Chaque centaine d'articles est vendue 7 000 €. La recette totale pour *x* centaines d'articles est donnée, en admettant que toute la production soit vendue, par $R_T(x)=7x$ en milliers d'euros. Le bénéfice est donc défini par $B_T(x)=R_T(x)-C_T(x)$.
   a. En annexe sont représentées les fonctions C_T et R_T .
   Par lecture graphique déterminer :
      – le coût moyen minimal,
      – l'intervalle dans lequel doit se situer la production *x* pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E,
      – la production x_0 pour laquelle le bénéfice est maximal.
   On fera apparaître les constructions nécessaires.
   b. Avec l'aide de votre calculatrice, affiner l'intervalle (à un article près) dans lequel doit se situer la production *x* pour qu'il y ait un bénéfice positif de l'entreprise E.

ANNEXE