EXERCICE 3 *(7 points)*

PARTIE A

1. Résoudre, dans l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels, l'équation :
$$2X^2 - 15X + 18 = 0.$$

2. En déduire
   a. les solutions de l'équation : $2e^{2x} - 15e^x + 18 = 0$;
   b. le signe de $2e^{2x} - 15e^x + 18$ selon les valeurs de *x*.

PARTIE B

Soit *f* la fonction définie par :

pour tout nombre réel *x* de l'intervalle] ln3 ; + ∞[, $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{3}{e^x - 3}$.

On note (C_f) la courbe représentative de la fonction *f* relativement à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

1. Déterminer la limite de la fonction *f* en ln3. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?
2. Démontrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à la courbe (C_f) en + ∞. Quelle est la limite de la fonction *f* en + ∞ ?
3. Étudier la position relative de (C_f) et (D) .
4. La fonction *f* est dérivable sur l'intervalle] ln3 ; + ∞[; on note *f* ′ sa dérivée. Montrer que :

   pour tout nombre réel *x* de l'intervalle] ln3 ; + ∞[, $f'(x) = \dfrac{2e^{2x} - 15e^x + 18}{(e^x - 3)^2}$.

   En déduire, à l'aide de la partie A, le signe de *f* ′(*x*) puis dresser le tableau de variations de *f* .
5. Tracer la courbe (C_f) ainsi que ses asymptotes. (Si la fonction présente un minimum ou un maximum, le mettre en évidence.)
6. a. Montrer que :

   pour tout réel *x* de l'intervalle] ln3 ; + ∞[, $f(x) = 2x - 3 + \dfrac{e^x}{e^x - 3}$.

   b. Soit *g* la fonction définie par :

   pour tout réel *x* de l'intervalle] ln3 ; +∞[, $g(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 3}$.

   Déterminer une primitive de la fonction *g* sur l'intervalle] ln3 ; +∞[.

   c. En déduire une primitive de la fonction *f* sur l'intervalle] ln3 ; +∞[.