EXERCICE 4 *(5 points)*

On considère la fonction *f* définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $f(x) = (x^2 + x + 1)\mathrm{e}^x$.

Dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm sur chaque axe, on note C_f sa représentation graphique et $C_{\exp}$ la représentation graphique de la fonction exponentielle.

1. Déterminer la limite de *f* en + ∞.
   b. Donner les valeurs de $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2\mathrm{e}^x$ et de $\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^x$.
   c. En déduire que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$. Que peut-on en déduire graphiquement ?
2. On note f' la fonction dérivée de *f* sur $\mathbb{R}$, montrer que $f'(x) = (x+1)(x+2)\mathrm{e}^x$.
   b. Étudier le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire le tableau de variations de la fonction *f*.
3. Déterminer le signe de *f* sur $\mathbb{R}$.
4. a. Préciser les positions relatives de C_f et de $C_{\exp}$.
   b. Construire ces deux courbes dans le repère $(\mathrm{O}; \vec{i}; \vec{j})$.
5. Soit *F* la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par : $F(x) = (x^2 - x + 2)\mathrm{e}^x$.
   Prouver que *F* est une primitive de *f* sur $\mathbb{R}$.
6. a. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine D délimité par la courbe C_f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.
   b. Déterminer la valeur exacte de l'aire en cm^2 du domaine D' délimité par les courbes C_f et $C_{\exp}$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.