

**EXERCICE 4** (6 points)

Suite à un accident industriel, un gaz se répand dans un local d'usine.

L'évolution du taux de gaz dans l'air peut être modélisé grâce à la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $[0 ; +\infty [$  par  $f(x) = 2xe^{-x}$  où  $x$  est le nombre de minutes écoulées depuis l'accident et  $f(x)$  le taux de gaz dans l'air exprimé en parties pour million (ppm).

1. a. On rappelle que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x}{e^x} \right) = 0$ . Déterminer la limite de  $f$  en  $+\infty$ .  
b. On admet que la fonction  $f$  est dérivable sur l'intervalle  $[0 ; +\infty [$  et on note  $f'$  sa fonction dérivée. Calculer  $f'(x)$  et étudier son signe pour  $x$  élément de l'intervalle  $[0 ; +\infty [$ .  
Donner le tableau complet des variations de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; +\infty [$ .
2. On admet que le taux de gaz dans l'air est négligeable après 5 minutes. C'est pourquoi, dans la suite de l'exercice, on restreindra l'étude de la fonction  $f$  à l'intervalle  $[0 ; 5]$ .  
Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  est donnée en annexe 2.
  - a. Vérifier que la fonction  $F$  définie sur l'intervalle  $[0 ; 5]$  par  $F(x) = (-2 - 2x)xe^{-x}$  est une primitive de  $f$  sur cet intervalle.
  - b. Calculer la valeur moyenne  $m$  (exprimée en ppm) du taux de gaz pendant les 5 minutes.  
On déterminera la valeur exacte de  $m$  puis on donnera sa valeur approchée arrondie à 0,01 ppm près.
3. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*  
On considère que le gaz a un effet irritant pour l'organisme si le taux dépasse 0,65 ppm pendant plus d'une minute.

Déterminer si le personnel de l'usine a été affecté ou non par la fuite de gaz, en explicitant la démarche.

ANNEXE 2

