

Une entreprise fabrique des enceintes acoustiques sans fil. Le coût de production d'une enceinte est de 300 euros.

On note  $x$  le prix de vente en centaines d'euros d'une enceinte.

Une étude de marché permet de modéliser la situation : pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[3 ; 10]$ , si le prix de vente d'une enceinte est  $x$  centaines d'euros, alors le nombre d'acheteurs est modélisé par

$$f(x) = e^{-0,25x+5}.$$

Ainsi,  $f(x)$  est une approximation du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de  $x$  centaines d'euros. Par exemple, si le prix de vente d'une enceinte est fixé à 400 euros, le nombre d'acheteurs est approché par  $f(4)$ .

1. Donner une valeur approximative du nombre d'acheteurs pour un prix de vente de 400 euros.  
On appelle marge brute la différence entre le montant obtenu par la vente des enceintes et leur coût de production.
2. Quelle est la marge brute de cette entreprise pour un prix de vente de 400 euros par enceinte?  
On note  $g(x)$  la marge brute, en centaines d'euros, réalisée par l'entreprise pour un prix de vente de  $x$  centaines d'euros par enceinte.
3. Montrer que pour tout réel  $x$  appartenant à l'intervalle  $[3 ; 10]$ ,

$$g(x) = (x - 3) e^{-0,25x+5}.$$

4. Un logiciel de calcul formel donne les résultats suivants :

factoriser (dérivée $[(x - 3) * \exp(-0,25x + 5)]$ )
$-\frac{x-7}{4} e^{-\frac{1}{4}x+5}$

- a. En utilisant le résultat du logiciel de calcul formel, étudier les variations de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $[3 ; 10]$ .
  - b. Pour quel prix de vente unitaire l'entreprise réalisera-t-elle la marge brute maximale? Donner alors une valeur approchée de cette marge brute à l'euro près.
5. Soit  $G$  la fonction telle que  $G(x) = (-4x - 4) e^{-0,25x+5}$  pour tout réel  $x$  de  $[3 ; 10]$ .
    - a. Montrer que  $G$  est une primitive de la fonction  $g$ .
    - b. On pose  $I = \int_3^{10} g(x) dx$ . Déterminer la valeur exacte de  $I$ .