Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[1; 25]$ par

$$f(x) = 10 - \frac{e^{0,2x+1}}{x}.$$

Un logiciel de calcul formel fournit les résultats suivants que l'on pourra utiliser :

$f(x) : 10 - e^{(0.2x + 1)}/x$	
	$x \rightarrow 10 - \frac{\exp(0.2x + 1)}{x}$
factoriser(deriver($f(x)$))	$\frac{\exp(0.2x + 1) * (1 - 0.2x)}{x^2}$
factoriser (deriver(deriver($f(x)$)))	$\frac{\exp(0.2x + 1) * (-x^2 + 10x - 50)}{25x^3}$

1. Retrouver par le calcul l'expression factorisée de $f'(x)$ où f' est la fonction dérivée de f .
2. Étudier le signe de f' sur l'intervalle $[1; 25]$ et dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle $[1; 25]$. On arrondira les valeurs au millième.
3. On s'intéresse à l'équation $f(x) = 0$.
 - a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution sur l'intervalle $[1; 5]$.
 - b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[5; 25]$.
 - c. Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de la solution α .
 - d. En utilisant un des résultats donnés par le logiciel de calcul formel, justifier que la fonction f est concave sur l'intervalle $[1; 25]$.

Partie B

Une société agro-alimentaire fabrique des aliments pour bétail. On s'intéresse au bénéfice réalisé, en millier d'euros, correspondant à la production d'une quantité de x dizaines de tonnes d'aliments.

On admet que ce bénéfice peut être modélisé par la fonction f étudiée dans la partie A ci-dessus. La production minimale est de 10 tonnes, ainsi $x \geq 1$.

Les réponses aux questions suivantes seront justifiées grâce à la partie A.

1. Quel est le montant en euro du bénéfice maximal que peut dégager la société?
Pour quelle quantité d'aliments ce bénéfice maximal est-il obtenu?
2. Déterminer, à la tonne près, la quantité maximale d'aliments qu'il faut fabriquer pour que la société réalise un bénéfice.