Partie A

Soit f la fonction définie sur $[0\,;8]$ par

$$f(x) = \frac{0,4}{20\mathrm{e}^{-x}+1} + 0,4.$$

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{8\mathrm{e}^{-x}}{\left(20\mathrm{e}^{-x}+1\right)^2}$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
2. Un logiciel de calcul formel donne les résultats ci-dessous :

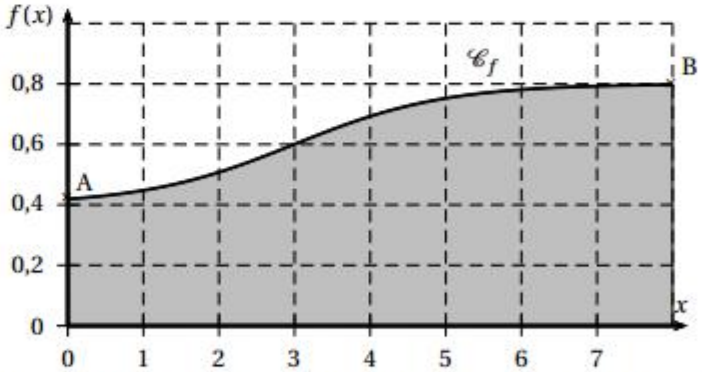
1	$f'(x) := 8*\mathrm{e}\hat{}(-x)/(20*\mathrm{e}\hat{}(-x)+1)^2$ $\rightarrow f'(x) : \dfrac{8\cdot\mathrm{e}^{-x}}{400\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2+40\mathrm{e}^{-x}+1}$
2	$g(x) :=$ Dérivée $[f'(x)]$ $\rightarrow g(x) := \dfrac{160\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2-8\mathrm{e}^{-x}}{8000\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^3+1200\left(\mathrm{e}^{-x}\right)^2+60\mathrm{e}^{-x}+1}$
3	Factoriser $[g(x)]$ $\rightarrow 8\mathrm{e}^{-x}\cdot\dfrac{20\mathrm{e}^{-x}-1}{\left(20\mathrm{e}^{-x}+1\right)^3}$

En s'appuyant sur ces résultats, déterminer l'intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

Partie B

Dans une région montagneuse, une entreprise étudie un projet de route reliant les villages A et B situés à deux altitudes différentes. La fonction f, définie dans la partie A, modélise le profil de ce projet routier. La variable x représente la distance horizontale, en kilomètres, depuis le village A et $f(x)$ représente l'altitude associée, en kilomètres.

La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ de la fonction f est donnée ci-dessous.



Dans cet exercice, le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point M est appelé « pente en M ».
On précise aussi qu'une pente en M de 5 % correspond à un coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en M égal à 0,05.
Il est décidé que le projet sera accepté à condition qu'en aucun point de $\mathscr{C}_f$ la pente ne dépasse 12 %.

Pour chacune des propositions suivantes, dire si la proposition est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

Proposition 1
L'altitude du village B est 0,6 km.
Proposition 2
L 'écart d'altitude entre les villages A et B est 378 mètres, valeur arrondie au mètre.
Proposition 3
La pente en A vaut environ 1,8 %.
Proposition 4
Le projet de route ne sera pas accepté.