

On injecte à un patient un médicament et on mesure régulièrement, pendant 15 heures, la concentration, en grammes par litre, de ce médicament dans le sang.

On obtient la courbe fournie en annexe 2.

A. Étude graphique

Avec la précision permise par le graphique, indiquer :

1. la concentration à l'instant initial ;
2. l'intervalle de temps pendant lequel la concentration est supérieure ou égale à 0,4 gramme par litre.

On fera apparaître sur le graphique les traits de construction nécessaires.

B. Étude théorique :

On admet que la concentration peut être modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 15]$ par :

$$f(x) = (x + 2)e^{-0,5x},$$

où x représente le nombre d'heures écoulées depuis l'instant initial et $f(x)$ la concentration, en grammes par litre, du médicament dans le sang.

1. On note f' la fonction dérivée de la fonction f . Justifier que $f'(x) = -0,5xe^{-0,5x}$ et en déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[0; 15]$.
2. Justifier que l'équation $f(x) = 0,1$ admet une unique solution a sur l'intervalle $[0; 15]$.
3. Déterminer un encadrement de a d'amplitude un dixième.
4. Un logiciel de calcul formel donne le résultat ci-dessous :

1	derivez $((x + 2) \cdot \exp(-0,5 \cdot x))$	$\exp(-0,5x) - 0,5 \cdot \exp(-0,5x) \cdot (x + 2)$
2	derivez $(\exp(-0,5 \cdot x) - 0,5 \cdot \exp(-0,5 \cdot x) \cdot (x + 2))$	$-\exp(-0,5 \cdot x) + 0,25 \cdot \exp(-0,5 \cdot x) \cdot (x + 2)$
3	factorisez $(-\exp(-0,5 \cdot x) + 0,25 \cdot \exp(-0,5 \cdot x) \cdot (x + 2))$	$(0,25 \cdot x - 0,5) \cdot \exp(-0,5 \cdot x)$

En vous appuyant sur ces résultats, étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $[0; 15]$ et préciser l'abscisse d'un éventuel point d'inflexion.

C. Interprétation des résultats :

En vous aidant des résultats obtenus, soit dans la partie B, soit par lecture graphique et sans justifier, répondre aux questions ci-dessous.

1. On estime que le médicament n'est plus actif lorsque la concentration est strictement inférieure à 0,1 gramme par litre. Pendant combien de temps le médicament est-il actif ?
2. Au bout de combien d'heures la baisse de concentration ralentit-elle ?

Annexe 2

