Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 5]$ par

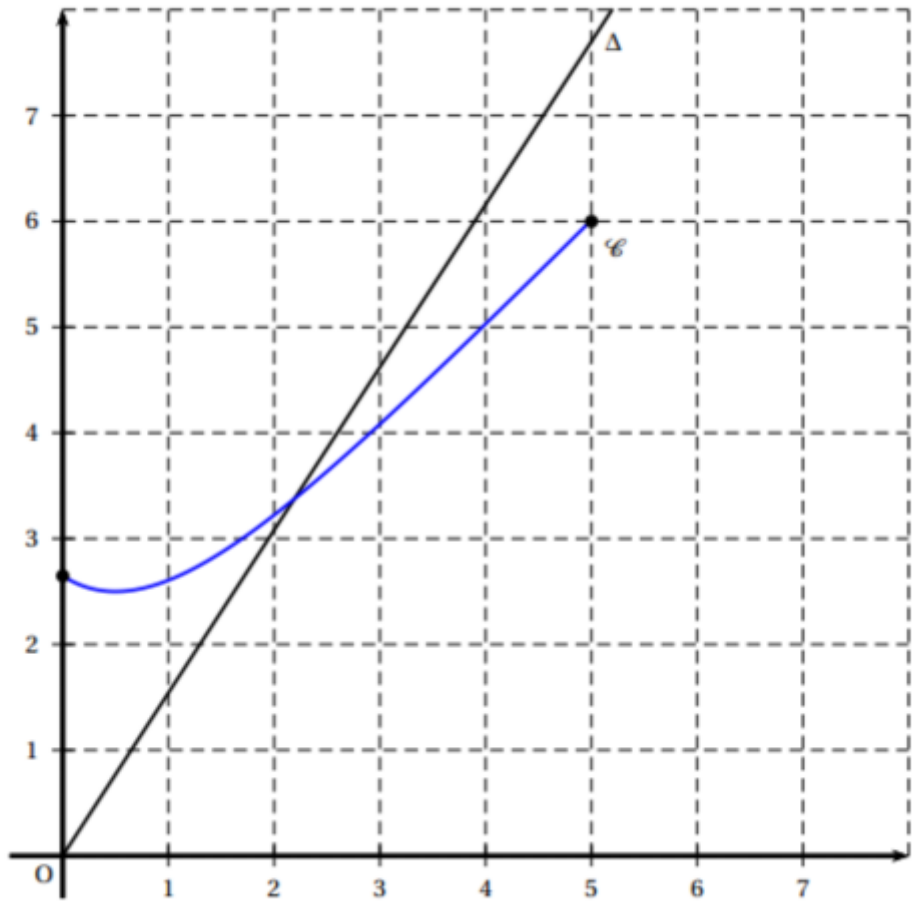
$$f(x) = x + 1 + e^{-x+0,5}.$$

On a représenté **en annexe**, dans un plan muni d'un repère orthonormé :
- la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f ;
- la droite Δ d'équation $y = 1,5x$.

1. **a.** Vérifier que pour tout x appartenant à l'intervalle $[0 ; 5]$, on a $f'(x) = 1 - e^{-x+0,5}$ où f' désigne la fonction dérivée de f.
   b. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 5]$ l'équation $f'(x) = 0$.
   c. Étudier le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
   d. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
2. On note α l'abscisse du point d'intersection de $\mathscr{C}$ et Δ.
   a. Donner, par lecture graphique, un encadrement de α à 0,5 près.
   b. Résoudre graphiquement sur l'intervalle $[0 ; 5]$ l'inéquation $f(x) < 1,5x$.

Partie B Application

Une entreprise fabrique des cartes à puces électroniques à raide d'une machine.
La fonction f, définie dans la partie A, représente le coût d'utilisation de la machine en fonction de la quantité x de cartes produites, lorsque x est exprimé en centaines de cartes et $f(x)$ en centaines d'euros.

1. **a.** Déduire de la partie A, le nombre de cartes à produire pour avoir un coût minimal d'utilisation de la machine.
   b. Chaque carte fabriquée par la machine est vendue 1,50 €.
   La recette perçue pour la vente de x centaines de cartes vaut donc $1,5x$ centaines d'euros.
   Vérifier que le bénéfice obtenu, en centaines d'euros, par la vente de x centaines de cartes est donné par $B(x) = 0,5x - 1 - e^{-x+0,5}$.
2. **a.** Montrer que la fonction B est strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 5]$.
   b. Montrer que, sur l'intervalle $[0 ; 5]$, l'équation $B(x) = 0$ admet une unique solution comprise entre 2,32 et 2,33.
3. On dira que l'entreprise réalise un bénéfice lorsque $B(x) > 0$.
   Indiquer la quantité minimale qui doit figurer sur le carnet de commandes de l'entreprise pour que celle-ci puisse réaliser un bénéfice.

EXERCICE 4