Soit $f$ la fonction définie sur l'intervalle $[2\,;5]$ par

$$f(x) = (3-x)\mathrm{e}^x + 1,$$

soit $f'$ sa fonction dérivée et soit $f''$ sa fonction dérivée seconde.

**1.** Montrer que, pour tout nombre réel $x$ appartenant à l'intervalle $[2\,;5]$, $f'(x) = (2-x)\mathrm{e}^x$ et $f''(x) = (1-x)\mathrm{e}^x$.

**2.** Étudier les variations de la fonction $f$ sur l'intervalle $[2\,;5]$.

**3.** Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[2\,;5]$.
Montrer que : $3 < \alpha < 4$.

**4.** **a.** Soit $T$ la tangente à la courbe représentative de la fonction $f$ au point d'abscisse 3.
Montrer que $T$ a pour équation $y = -\mathrm{e}^3 x + 3\mathrm{e}^3 + 1$.

**b.** Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite $T$ et de l'axe des abscisses.

**c.** Étudier le signe de $f''(x)$ sur l'intervalle $[2\,;5]$ et en déduire la convexité ou la concavité de $f$ sur cet intervalle.

**d.** En déduire que : $\alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3}$.
On a donc : $3 < \alpha < 3 + \dfrac{1}{\mathrm{e}^3} < 3,05$.

**5.** On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| **Variables :** | $a, b, m$ et $r$ sont des nombres réels |
| **Initialisation :** | Affecter à $a$ la valeur 3 |
| | Affecter à $b$ la valeur 3,05 |
| **Entrée :** | Saisir $r$ |
| **Traitement :** | TANT QUE $b - a > r$ |
| | Affecter à $m$ la valeur $\dfrac{a+b}{2}$ |
| | SI $f(m) > 0$ |
| | ALORS Affecter à $a$ la valeur $m$ |
| | SINON Affecter à $b$ la valeur $m$ |
| | FIN SI |
| | FIN TANT QUE |
| **Sortie :** | Afficher $a$. |
| | Afficher $b$ |

**a.** Faire fonctionner l'algorithme précédant avec $r = 0,01$ en recopiant et complétant le tableau ci-dessous. On arrondira au millième les valeurs de $f(m)$.

| | $b-a$ | $b-a>r$ | $m$ | $f(m)$ | $f(m)>0$ | $a$ | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Initialisation | | | | | | 3 | 3,05 |
| étape 1 | 0,05 | oui | 3,025 | 0,485 | oui | 3,025 | 3,05 |
| étape 2 | | | | | | | |
| étape 3 | | | | | | | |

**b.** Interpréter les résultats trouvés pour $a$ et $b$ à la fin de l'étape 3.