

EXERCICE 4 (5 points)

Le but de cet exercice est de déterminer le bénéfice maximum réalisable pour la vente d'un produit « alpha » fabriqué par une entreprise. Toute l'étude porte sur un mois complet de production.

Le coût marginal de fabrication du produit « alpha » par l'entreprise est modélisé par la fonction C_m définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par $C_m(q) = 4 + (0,2q^2 - 2q)e^{-0,2q}$, q étant la quantité exprimée en tonnes et $C_m(q)$ son coût exprimé en milliers d'euros.

1. La fonction coût total est modélisée par la fonction C_T définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par $C_T(q) = 4q - q^2 e^{-0,2q}$.

Vérifier que cette fonction C_T est une primitive de la fonction C_m sur l'intervalle $[1 ; 20]$.

2. La fonction coût moyen, notée C_M , est la fonction définie sur l'intervalle $[1 ; 20]$ par

$$C_M(q) = \frac{C_T(q)}{q}.$$

a. Vérifier que $C_M(q) = 4 - qe^{-0,2q}$.

b. Déterminer la fonction dérivée C_M' de la fonction C_M .

c. Pour quelle production mensuelle q_0 (exprimée en tonnes) l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimal ?

Quel est ce coût ? Pour cette production q_0 , quelle est la valeur du coût marginal ?

3. *Toute trace de recherche même incomplète, d'initiative même non fructueuse sera prise en compte dans l'évaluation.*

On suppose que l'entreprise vend toute sa production mensuelle.

Chaque tonne du produit « alpha » est vendue 4 000 euros.

On désigne par $R(q)$ la recette mensuelle obtenue pour la vente de q tonnes du produit « alpha » et par $B(q)$ le bénéfice mensuel en millier d'euros ainsi réalisé.

Les représentations graphiques des fonctions recette et coût total sont données dans l'annexe 2 à rendre avec la copie.

Estimer graphiquement, en précisant votre démarche, le bénéfice maximal que l'on peut espérer sur le mois étudié.

ANNEXE 2

