EXERCICE 3 **(** 6 *points* **)**

Une entreprise fabrique chaque mois *x* tonnes d'un certain produit, avec *x* appartenant à l'intervalle]0; 6]. Le coût moyen de fabrication, exprimé en milliers d'euros, pour une production mensuelle de *x* tonnes est donné par *C*(*x*), où *C* est la fonction définie par $C(x)=\dfrac{0,01\mathrm{e}^{x}+2}{x}$

1. À l'aide de la calculatrice
   a. conjecturer en terme de variations l'évolution du coût moyen de fabrication sur l'intervalle]0; 6];
   b. estimer le minimum du coût moyen de fabrication et la production mensuelle correspondante ;
   c. dire s'il est possible d'atteindre un coût moyen de fabrication de 4000 euros. On précisera la méthode utilisée.
2. On désigne par C' la fonction dérivée de la fonction *C*. Montrer que, pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle]0; 6] :
$$C'(x)=\frac{0,01x\mathrm{e}^{x}-0,01\mathrm{e}^{x}-2}{x^{2}}$$
3. On considère la fonction *f* définie sur l'intervalle]0; 6] par $f(x)=0,01x\mathrm{e}^{x}-0,01\mathrm{e}^{x}-2$.
   On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction *f*.
   a. Vérifier que pour tout nombre réel *x* appartenant à l'intervalle]0; 6] $f'(x)=0,01x\mathrm{e}^{x}$.
   b. Justifier que la fonction *f* est strictement croissante sur l'intervalle]0; 6].
   c. Justifier que l'équation $f(x)=0$ admet une seule solution α appartenant à l'intervalle [4; 5].
   Donner la valeur arrondie au dixième du nombre réel α.
   d. Déduire des résultats précédents le signe de *f*(*x*) sur l'intervalle]0; 6].

À l'aide des questions précédentes, justifier que le minimum du coût moyen de fabrication est obtenu pour une production mensuelle de α tonnes du produit