

EXERCICE 1 (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

On s'intéresse dans cet exercice à la fonction f définie sur l'ensemble des réels \mathbb{R} par

$$f(x) = -1 + xe^x$$

On note C sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
b. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
(On rappelle le résultat : $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^x = 0$)
2. On admet que la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et on note f' sa fonction dérivée.
 - a. Montrer que, pour tout nombre réel x on a $f'(x) = (x+1)e^x$.
 - b. Dresser le tableau de variations de la fonction f (la valeur de l'extremum sera arrondie à 10^{-2}).
3. Justifier que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$.
Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .
4. Démontrer qu'une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse 0 est $y = x - 1$.
5. Dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tracer la droite T et la courbe C .
Quelle conjecture peut-on faire sur la position de la courbe C par rapport à la droite T ?
6. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.
Justifier la conjecture émise à la question 5.