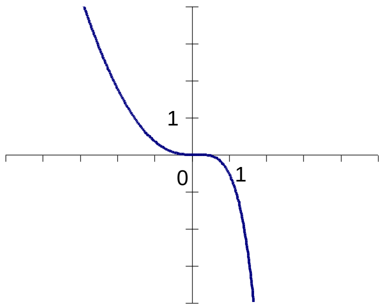
EXERCICE 4 *(6 points)*

On considère la fonction numérique *f* dénie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel *x*, on ait :

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - x^2 e^{x-1}$$

On note *f ′* sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}$.

Le graphique ci-après est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthogonal.



1. Quelle conjecture pourrait-on faire concernant le sens de variation de *f* sur l'intervalle [− 3 ; 2] en observant cette courbe ?

   Dans la suite du problème, on va s'intéresser à la validité de cette conjecture.

2. Calculer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = xg(x)$ où $g(x) = 1 - (x+2)e^{x-1}$ pour tout *x* de $\mathbb{R}$.
   Pour la suite, on admet que *g* est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note *g′* sa fonction dérivée.

3. Étude du signe de *g* (*x*) suivant les valeurs de *x*.
   a. Calculer les limites respectives de *g* (*x*) quand *x* tend vers $+\infty$ et quand *x* tend vers $-\infty$.
   On pourra utiliser sans la démontrer l'égalité : $g(x) = 1 - \dfrac{xe^x + 2e^x}{e}$
   b. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs du nombre réel *x*.
   c. En déduire le sens de variation de la fonction *g* puis dresser son tableau de variation en y reportant les limites déterminées précédemment.
   d. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Justifier que 0,20 <α < 0,21.
   e. Déterminer le signe de *g* (*x*) suivant les valeurs de *x*.
4. Sens de variation de la fonction *f*
   a. Étudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de *x*.
   b. En déduire le sens de variation de la fonction *f*.
   c. Que pensez-vous de la conjecture de la question 1 ?